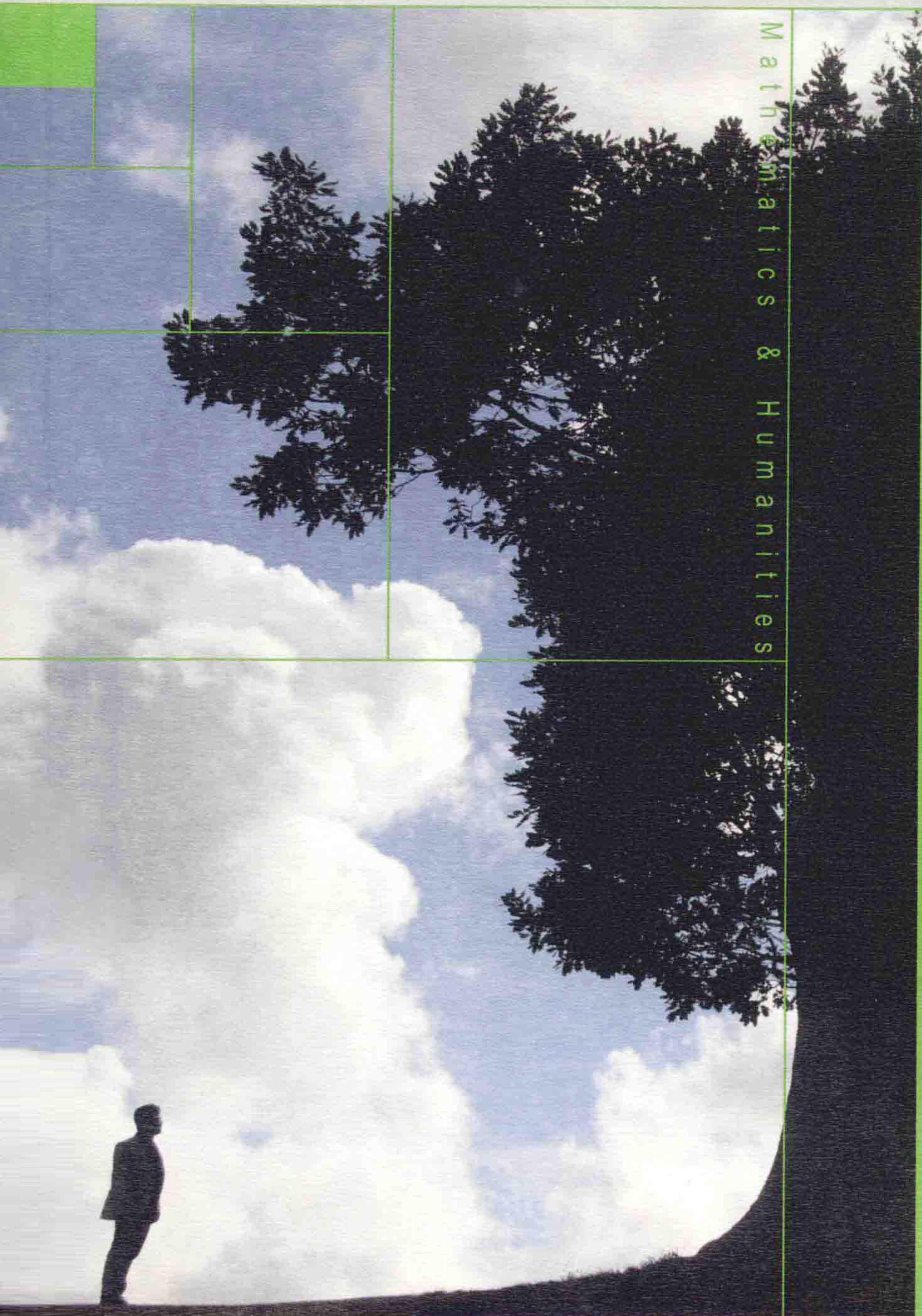
数学与人文·第十五辑

与数学大师面对面

Mathematics & Humanities

主编 丘成桐 刘克峰 杨乐 季理真
副主编 徐浩



高等教育出版社

丘成桐：品味与整个人的素质和性情的培养是很有关系的，要从小培养，不是一朝一夕就行的。搞数学的人，也要看文学方面的东西。你不看文学，看京剧也可以。这样对提升自己的想象力，还有价值观都会有好处。有时候你看一幅名画，看来看去不知道它表达什么，可是看得多了就会有更多的认识。多看名著，多看一些数学家的传记，会受到启发。

小平邦彦：一般认为数学是按严密的逻辑构成的科学，即使与逻辑不尽相同，却也大致一样。但是实际上，数学与逻辑没有什么关系。数学当然应该遵循逻辑，但逻辑在数学中的作用就像文法在文学中的作用一样。书写合乎文法的文章与照着文法去写小说完全是两码事。同样，进行正确的逻辑推理与堆砌逻辑去构成数学理论是性质完全不同的事情。

乌伦贝克：我和许多人认为，女数学家通常有更好的社交能力，女性通常较具有沟通能力而且善于和他人互动，这些能力使得女性在应用数学方面有较好的表现，比较能够和科学中非数学领域的人讨论。这是女性在应用数学方面的优点。

拉乌尔·鲍特：你要追逐一个问题，而不是一个领域。你必须要遵从你的直觉，并且希望某一刻你可以偶然发现一个你有可能会做出贡献的方向。





ISBN 978-7-04-041222-2

9 787040 412222 >

上架建议：科学素养、数学

academic.hep.com.cn

定价 25.00 元

人文·第十五辑

tics & Humanities

与数学大师面对面

YU SHUXUE DASHI MIANDUIMIAN

主　编　丘成桐　刘克峰　杨　乐　季理真

副主编　徐　浩

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

International Press

图书在版编目（CIP）数据

与数学大师面对面 / 丘成桐等主编. —北京：高等教育出版社，2015.1
（数学与人文. 第 15 辑）
ISBN 978-7-04-041222-2

Ⅰ.①数… Ⅱ.①丘… Ⅲ.①数学-普及读物 Ⅳ.①O1-49

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第234944号

出 品 人 苏雨恒
总 监 制 吴 向
总 策 划 李冰祥
策　　划 赵天夫
责任编辑 赵天夫
书籍设计 王凌波
责任印制 韩 刚

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
　　　　 http://www.landraco.com.cn
印　　刷 涿州市星河印刷有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16
印　　张 9.75
字　　数 180 千字
版　　次 2015 年 1 月第 1 版
印　　次 2015 年 1 月第 1 次印刷
定　　价 25.00元

物 料 号 41222-00

内 容 简 介

《数学与人文》丛书第十五辑将继续着力贯彻“让数学成为国人文化的一部分”的宗旨，展示数学丰富多彩的方面。

“数学家访谈”栏目汇集对陈省身、丘成桐、萧荫堂、姚鸿泽、乌伦贝克、广中平佑等多位当代数学大师的访谈，与读者一起分享他们对数学研究的经验和看法。国际著名数学家刘克峰讲述他在哈佛大学师从丘成桐和鲍特的学习经历。“名家文选”栏目刊登了多篇由数学大师亲自撰写的通俗文章，向读者介绍在他们眼中什么是数学、如何学习数学、如何做数学研究等有趣的话题。“数学故事”栏目则讲述了数学家杨忠道、数学天才拉马努金的故事，概述了在计算机科学领域取得突出贡献的数学家的主要成就，并简要介绍了苏联数学的概况。

我们期望本丛书能受到广大学生、教师和学者的关注和欢迎，期待读者对办好本丛书提出建议，更希望丛书能成为大家的良师益友。

丛书编委会

《数学与人文》丛书序言

丘成桐

《数学与人文》是一套国际化的数学普及丛书，我们将邀请当代第一流的中外科学家谈他们的研究经历和成功经验。活跃在研究前沿的数学家们将会用轻松的文笔，通俗地介绍数学各领域激动人心的最新进展、某个数学专题精彩曲折的发展历史以及数学在现代科学技术中的广泛应用。

数学是一门很有意义、很美丽、同时也很重要的科学。从实用来讲，数学遍及物理、工程、生物、化学和经济，甚至与社会科学有很密切的关系，数学为这些学科的发展提供了必不可少的工具；同时数学对于解释自然界的纷繁现象也具有基本的重要性；可是数学也兼具诗歌与散文的内在气质，所以数学是一门很特殊的学科。它既有文学性的方面，也有应用性的方面，也可以对于认识大自然做出贡献，我本人对这几方面都很感兴趣，探讨它们之间妙趣横生的关系，让我真正享受到了研究数学的乐趣。

我想不只数学家能够体会到这种美，作为一种基本理论，物理学家和工程师也可以体会到数学的美。用一个很简单的语言解释很繁复、很自然的现象，这是数学享有“科学皇后”地位的重要原因之一。我们在中学念过最简单的平面几何，由几个简单的公理能够推出很复杂的定理，同时每一步的推理又是完全没有错误的，这是一个很美妙的现象。进一步，我们可以用现代微积分甚至更高深的数学方法来描述大自然里面的所有现象。比如，面部表情或者衣服飘动等现象，我们可以用数学来描述；还有密码的问题、电脑的各种各样的问题都可以用数学来解释。以简驭繁，这是一种很美好的感觉，就好像我们能够从朴素的外在表现，得到美的感受。这是与文化艺术共通的语言，不单是数学才有的。一幅张大千或者齐白石的国画，寥寥几笔，栩栩如生的美景便跃然纸上。

很明显，我们国家领导人早已欣赏到数学的美和数学的重要性，在 1999 年，江泽民先生在澳门濠江中学提出一个几何命题：五角星的五角套上五个环后，环环相交的五个点必定共圆，意义深远，海内外的数学家都极为欣赏这个高雅的几何命题，经过媒体的传播后，大大地激励了国人对数学的热情，我希望这个丛书也能够达到同样的效果，让数学成为我们国人文化的一部分，让我们的年轻人在中学念书时就懂得欣赏大自然的真和美。

目　录

数学故事

数学是有很强活力的

陈省身

陈省身，美籍华人，20 世纪世界级的几何学家。1911 年 10 月 28 日出生于浙江省嘉兴县。1930 年毕业于天津南开大学。1934 年获清华大学理学硕士学位。1936 年获德国汉堡大学理学博士学位。1943 年为美国普林斯顿高等研究院研究员。1949 年为美国芝加哥大学教授。1960 年至 1979 年为美国伯克利加州大学教授。1961 年加入美国籍。他是前中研院首届院士（1948 年），美国国家科学院院士（1961 年），第三世界科学院创始成员（1983 年），英国皇家学会外籍会员（1985 年），意大利国家科学院外籍院士（1988 年），法国科学院外籍院士（1989 年）。1994 年当选为中国科学院首批外籍院士。曾荣获最高数学奖——沃尔夫奖，美国国家科学奖章等。

数学在 19 到 20 世纪有很大的发展，一般来讲，数学的发展是有连续性的，有一个主要的主题，然后由这个主题向各方面推展，有基础方面的澄清，有各方面的应用。最近，数学和理论物理的关系、数论方面的重大发展、计算机的引进在数学上引出了许多新问题，对探讨老问题有很多帮助。种种迹象表明，数学是有很强活力的，所以 21 世纪有很多事情要大家做。


陈省身

近些年来，中国的数学有很大进展，怎样根据这个进展，再向前推一步呢？20 世纪 20 年代法国有许多很伟大的数学家，如皮卡 (E. Picard, 1856—1941)、阿达马 (J. Hadamard,

1865—1963)、蒙泰尔 (P. Montel, 1876—1975)，那时他们都老了，他们的工作方向都是复变函数论，与近代数学，像抽象代数、拓扑都失掉了联络。那时候法国一些年轻的数学家觉得不一定要跟这些老先生学，决心自己念书，自己发展。这就是后来出现的有名的布尔巴基学派，他们对近现代数学的发展起了很大作用。

在此，我还想讲个故事：有些人可能会想，数学家们一天到晚没有事情可做，无中生有，搞这些多面体有什么意思？我认为，现在化学里的钛化合物就跟正多面体有关系。这就是说，经过 2000 年之后，正多面体居然会在化学里有用，有些数学家正在研究正多面体和分子结构间的关系。我们现在知道，生物学上的病毒也具有正多面体的形状。这表明，当年数学家的一种“空想”，经历了这么长的时间之后，竟然是很“实用”的。

不做主流也无妨

现在谈谈主流数学与非主流数学的问题。大家知道，数学有很多特点。比如做数学不需要很多设备，现在有电子邮件，要的资料很容易拿到。做数学是个人的学问，不像别的学科必须依赖于设备，大家争分夺秒在一些最主要的方向上工作，在主流方向做出你自己的贡献。而数学则不同。由于数学的方向很多，又是个人的学问，不一定大家都集中做主流数学。1943 年，我在西南联大教书，那年我应邀从昆明到普林斯顿高等研究院，该院靠近普林斯顿的一座小城叫新不伦瑞克，是新泽西州立大学所在地。我到普林斯顿不久，就在新不伦瑞克参加美国数学会的暑期年会。由于近，我也去听听演讲，会会朋友。有一次我和一位在美国非常有地位的数学家聊天，他问我做什么，我说微分几何，他立刻说“It is dead（它已死了）”。这是 1943 年的事，但战后的情形是微分几何成了主流数学。

因此，我觉得做数学的人，有可能找到现在并非主流但很有意义、将来很有希望的方向。主流方向上集中了世界上许多优秀人物，投入了大量的经费，你抢不过他们，赶不上，不如做其他同样很有意义的工作。我希望中国数学在某些方面能够生根，搞得特别好，具有自己的特色。这在历史上也有先例，例如第二次世界大战以前波兰就搞逻辑、点集拓扑。他们根据一些简单公式推出许多结论，成就不小。另外如芬兰，在复变函数论上取得成功，一直到现在，例如在拟共形映照上的推广一直在世界上领先，因为他们做的工作，别的国家不做，他们就拥有该领域内世界上最强的人物。我还可以举出更多的例子。

最近一个时期主流数学是什么？刚才我说过我并不喜欢大家都去搞主流数学，不过主流数学毕竟是重要的。所谓主流数学，是指一个伟大的数学贡

献，深刻的定理，含义很广，证明也很不简单。如果在当前选一个这样的贡献，我想那就是阿蒂亚–辛格指数定理。阿蒂亚是英国皇家学会会长，他来过北京，还做过报告。这个指数定理可看成是上面所谈问题的近代发展，即将代数方程、黎曼曲面、亏格理论等等从低维推广到高维和无穷维。

因此，我觉得数学研究不但是很深、很难、很强，而且做到一定的地步仍然维持一个整体，到现在为止，数学没有分裂为好几块，依旧是完整的。尽管现代数学的研究范围在不断扩大，有些观念看来比较次要，慢慢就被丢掉了，但基本的观念始终在维持着。

中国数学的根必须在中国

现在我讲 21 世纪的数学，也就是要讲中国的数学该怎么发展，如何使中国数学在 21 世纪占有若干方面的优势。办法说来很简单，就是要培养人才，找有能力的人来做数学，找到优秀的年轻人在数学上获得发展。具体一些讲，就是要在国内办够世界水平的第一流的数学研究院。中国这么大，不仅北京要有，别的地方也应该办。中国科学的根子必须在中国。中国科学技术在本土上生根，然后才能长上去。可是要请有能力的人来做数学很不容易。我从 1984 年开始组建南开数学所，开始想请有能力的人来工作就是了，可是由于种种原因，很难做到这一点。我们办第一流的研究所就是要有第一流的数学家。有了第一流的数学家，房子破一点，设备差一点，书也找不到，研究所仍是第一流的。不然的话，房子造得很漂亮，书很多，也有很贵的计算机，如果没有人来做第一流的工作，又有什么用处？我看到这种情形，就改变想法，努力训练自己的年轻人，培养自己的数学家，送他们出国学习，到世界各地，请最好的数学家给予指导。我很高兴地告诉大家，这些措施已经开始出现成效。比方说贺正需，他到美国加州大学圣迭戈分校跟弗里德曼学。弗里德曼得过菲尔兹奖，是年轻的领袖人物。他亲自对我说，贺正需是他最好的学生。我还可以提到一些人，这里不一一列举了。

发展数学势必要办够水平的研究院，怎样才会够水平呢？

第一，应当开一些基本的先进课程。学生来了，要给他们基本训练，就要为他们开高水平的课。所谓的基本训练有两方面。一是培养推理能力，一个学生应该知道什么是正确的推理，什么是不正确的推理。你必须保证每步都正确。不能急于得结果就马马虎虎，最后一定出毛病。二是要知道一些数学，对整个数学有个判断。从前是与分析有关的学科较重要，20 世纪以来是代数，后来是拓扑学等等。总之，好的研究中心应该能开这些基本课程。

第二，我想必须要有好的学生。我们每年派去参加国际奥林匹克数学竞赛的中学生都很不错。虽然中学里数学念得好将来不一定都研究数学，不过

希望有一部分人搞数学，而且能有成就。我和在北京的一些数学竞赛获奖学生见面，谈了话。我对他们说，搞数学的人将来会有大前途，十年、二十年之后，世界上一定会缺乏数学人才。现在的年轻人不愿念数学，势必造成人才短缺。学生不想念数学也难怪，因为数学很难，又没有把握。苦读多年之后，往往离成为数学家还很远。同时，又有许多因素在争夺数学家，例如计算机。做一个好的计算机软件，需要很高的才能，很不容易。不过它与数学相比，需要的准备知识很少。搞数学的人不知要念多少书，好像一直念不完。这样，有能力的人就转到计算机领域去了。也有一些数学博士，毕业后到股票市场做生意。例如预测股票市场的变化，写个计算机程序，以供决策。这样做，虽然还是别人的雇员，并非自己当老板，但这比大学教授的薪水高得多了。因此，数学人才的流失，是世界性的问题。

相比之下，中国的情况反而较为乐观，因为中国的人才多，流失一些还可以再培养。

流失的人如真能赚钱，发财之后会回来帮助盖数学楼。总之，我们应采取一种态度：中国变成一个输送数学家的工厂，希望出去的人能回来，如果不回来，建议我们仍然继续送。中国有的是人才，送出去一部分在世界上发挥影响也是值得的。

我们要做的事是花不多的钱，打好基础，开出好的课。基础搞得好了，至于出去的人回来不回来可以变得次要些。这是我的初步想法。比方说，参加国际奥林匹克数学竞赛的人，数学都是很好的，如果他们进大学数学系，我建议立刻给奖学金。这点钱恐怕很有限，但效果很大，对别人也是一种鼓励。中国的孩子比较听家长、老师的话。孩子有数学才能，经过家长、老师一劝，他就念数学了。

对好的数学系学生来说，到国外去只是时间问题。你只要在国内把数学做好，出国很容易。国内做得很好的话，到了国外不必做研究生，可以直接当教授。中国已有条件产生第一流的数学家，大家要有信心。

培养学生我主张流动。19 世纪的德国数学当然是世界第一。德国的大学生可以到任何大学去注册。这学期在柏林听魏尔斯特拉斯的课，下学期到格丁根听施瓦兹的课，随便流动。教授也可以流动。例如柏林大学已有普朗克、爱因斯坦，一个理论物理学家在柏林大学自然没有发展的希望，就不妨到别的学校去创业。

我希望中国的学生、教授都能流动。教授可以到别的学校去教课，教上半年。各个数学研究院的教授也能互相交换。

编者按：本文原载于《科学时报》。

培养兴趣和品味

—— 丘成桐访谈

丘成桐，当代数学大师，现任哈佛大学讲座教授，1971 年师从陈省身先生在加州大学伯克利分校获得博士学位。发展了强有力的偏微分方程技巧，使得微分几何学产生了深刻的变革。解决了卡拉比 (Calabi) 猜想、正质量猜想等众多难题，影响遍及理论物理和几乎所有核心数学分支。年仅 33 岁就获得代表数学界最高荣誉的菲尔兹奖 (1982)，此后获得 MacArthur 天才奖 (1985)、瑞典皇家科学院 Crafoord 奖 (1994)、美国国家科学奖 (1997)、沃尔夫奖 (2010) 等众多大奖。现为美国科学院院士，中国科学院和俄罗斯科学院的外籍院士。筹资成立浙江大学数学科学研究中心、香港中文大学数学研究所、北京晨兴数学中心和清华大学数学科学中心四大学术机构，担任主任，不取报酬。培养的 60 余位博士中多数是中国人，其中许多已经成为国际上杰出的数学家。由于对中国数学发展的突出贡献，获得 2003 年度中华人民共和国科学技术合作奖。

整理：季理真、杨静、戴俊飞

访谈时间：2004 年 7 月 25 日

访谈地点：浙江大学数学科学研究中心

问：丘先生，首先请介绍一下您的数学背景，然后是您的兴趣培养。比如说您为什么学数学，是什么引起您去学数学，就是向学生们讲讲您为什么会选择数学。

丘：其实主要是我的家庭背景。因为我父亲念哲学，他对抽象的东西感兴趣，所以也影响到了我。从这方面来看，我可能比其他人更容易接受抽象的想法，我对推理的思想也很感兴趣，所以念平面几何的时候就对三段论证很感兴趣。一般的学生看到三段论证都很头痛。我还自学了很多课外书。一

般学生都不爱看课外书，我觉得这是一个问题。好的书我看，不好的书也看，以后慢慢积累多了，对数学的兴趣也慢慢增长。我从前看了很多华罗庚写的书，很多外文书，刚开始都看不太懂，这没有什么关系。

中学的老师能将数学解释得很有意思，我觉得这是很重要的。很多中学老师就常常给学生造成数学很难的印象。美国、中国都有这种情况。我不仅喜欢看书，也喜欢做习题，你看平面几何书上看来看去就这些内容，我常自己找问题做。我从小就训练自己找问题。主要是出于好奇，很多事情慢慢摸索就可以找出解法。中学的时候我常常想，既然数学很严格，可以一步步证明，那么这个数字系统是怎么建立起来的。从整数到有理数很明显，可是从有理数扩展到实数，想来想去想不明白。到了大学，我方才了解清楚实数体系是怎样严格建立起来的。这段经历让我对数学的严格体系有了深刻的认识，对我来讲是很满足的感觉。小学其实我学得并不好，从中学开始，一直到大学，看了不少书。我对分数一向看得不太重，我中学时数学学得很好，可是那个时候我学习之余还要做家教，累了就容易出错，成绩虽然也还好，但不是最高分。我有个很好的朋友，他每次考试成绩都在我之上，但我不在乎。我想很多中国学生太重视考试分数了。有时候差不了几分就觉得很烦恼，就觉得天要塌下来，这对他的进步反而没有什么好处。

我在香港中文大学读书的时候，其中一个老师刚从伯克利博士毕业，我和他很熟，我们经常在课上交流看法，后来我们合写了常微分方程的书。我经常向老师提问，有时我也可以改进他的证明方法或者给出不同的看法。他觉得很不错，我觉得自己也能获得更多的了解。我当时并不想学几何，因为对几何学的了解还不多。当时刚学了一点几何、点集拓扑、代数和微分方程，对整个数学的认识很有限。我想学泛函分析，因为觉得泛函分析很漂亮，可是并没有真正了解泛函分析学科产生的背景。所以经常听报告，看文章是很有好处的，可以更好地了解一些理论或定理背后的动机，这是很有意思的。我真正对数学全景有了清晰的了解是在伯克利。

问：是通过自己看书，还是因为老师告诉您怎么样，就是您怎样改变您对数学的看法?

丘：在香港读大学的时候，图书馆不行，跟国外的图书馆相差很远。看不到什么好书，听不到好的课。到伯克利以后听了很多课，看了很多书。当时我从早到晚基本上都在听课。因为没有办公室，我整天在图书馆里看书。这是我在香港时就养成的习惯。

当时就是从早到晚听课，然后自己做饭吃。图书馆大多数数学书我都看过，不是所有的都能看懂。还有杂志也看，看了之后，其实很有好处。我选了3门课，有代数拓扑、微分几何和微分方程。代数拓扑是 Spanier 教的，那时

他刚写完他的著名的代数拓扑专著，里面的习题蛮难的。虽然我们刚学过一般拓扑学，可是根本就不知道代数拓扑，基本群、同调这些名词从来没听过。那时总共有五十多个人听课。那些学生好像什么都懂，可能因为他们以前接触过一些这方面的课程。我没有气馁，坚持做习题，把题目想通想透。逐渐地，你发现班上的其他人也不见得比你出色多少。这样我就很有信心了。

微分方程是听 Morrey 的课，Morrey 的书和文章是出名的难懂。他每周上课总是找些学生上讲台讲习题。有些学生很紧张，我就很怕这个。那时 Morrey 对我还不错，虽然他的书很难学，可是你听他讲就不觉得这么难。Morrey 的课开始有十多个人来听，他教的东西可能看起来很初等，比如算奇异积分。结果有的人觉得太初等，有的人觉得技巧太强，慢慢来听的人就越来越少，可是我觉得很有意思。以后发现，他在课上和书上讲的东西有很多连微分方程的专家也不了解。我一直认真地跟他学，Morrey 也蛮喜欢我。

我对米尔诺的书《莫尔斯理论》很感兴趣，我想推广其中一个关于曲率与基本群的定理，要用到群论方面的一些并不熟知的结果。于是我去图书馆找，一遍遍地查《数学评论》，居然正好找到我所需要的结果。

Lawson 做极小曲面，他的课基本不涉及基本群。有一次我告诉他我正在考虑的问题，他很感兴趣，就说一起做吧。虽然那时我是学生，他是老师。我们合作写了一篇重要的文章。

伯克利的博士资格考试一般有 4 门课可以选。我选的 3 门是代数拓扑、偏微分方程、代数。每个口试一个钟头，有 3 个老师。我记得代数拓扑考了 A^-，代数考了 A^+。

那个时候学校在罢课，根本就没有课上。有些老师在家里开课，Morrey 的课上就剩下我一个人，他索性就在办公室里授课了。我觉得蛮不错，他备课很认真，花很多时间去找参考文献。他的学问很好，他常说无所谓开始，你不去做的话就不知道到底有多难。平时我们做的很多习题，练了很多技巧，往往不知道到底怎么回事，到了最后要真正去做研究的时候才有深刻了解。很多时候新学到的知识，逐渐记熟了以后自然会发现有用。我本来以为小的技巧看起来不重要，可是 Morrey 强调说这个很重要。当时只有我一个学生，不由得不认真听。

我有很多时间都在书店看书。不光是数学书，其他书也看。因为从学校到我的住处，会经过书店，闲着无聊就去看看，朋友聊聊天，坐一坐。

另外我觉得很重要的是做笔记，因为有些内容你不一定理解，做好笔记回家还可以看。现在的学生都不大会去做笔记。

问：那您听课的时候会提问题吗？是提得比较多还是坐在那里很安静地听老师讲课？

丘：提问题倒不是很多。我记得大概 5 月才恢复上课。陈省身先生回来的时候，Lawson 就和他讲我在数学上做得如何出色。我想我当初申请去伯克利读研究生的时候，系里应该问过陈先生的意见。

我第一年住的房子有四个人住。一个外国人是学数学的，一个华人是念生物的，现在是台湾中研院的副院长。第二年的时候郑绍远来了，暑假我们经常出去玩。我的同学里还有 Thurston，他比我早进去，迟毕业。当时年轻人很多，气氛很好。

问：还有一个问题，前面您也提过，就是您怎么看待学问的专和博?

丘：两个都很重要。我在伯克利第一年的课，早上第一节课是规范理论，晚上最后一节课是机器语言，就是用半群来研究机器语言。

问：还有你的中文也很好。我记得您中学的时候也爱好文学，您当时为什么不选择文科，而是学数学呢?

丘：我对古文很感兴趣，小时候背了不少，后来也忘掉很多。我记得我以前一边念古文，一边唱。发现唱出来也很顺畅。我父亲去世前让我念，我就不想念，念的时候也偷懒，爸爸去世以后我就念得很多。因为有感情的寄托，慢慢我就觉得古文很有意思。中学的时候我背了很多古文，整整三年都是念古文。

问：一篇古文有多长，大概几页?

丘：有长有短，《孟子》,《论语》,《中庸》。比如《中庸》一整本都念了。那时课堂上要默写古文，写错的话，一个字扣 5 分，有时一行都没写出来，那就零分了。其实文学的熏陶是潜移默化的，慢慢熟悉了以后，就会喜欢，多念以后，沉淀在里面就好了，没什么了不起的。

问：那你自己也经常写一些古文吗?

丘：现在我已经很少写了。那个时候作文都喜欢写古文。我喜欢古文是因为念起来很通顺，白话文有些拖沓。当然也有例外，比如朱自清的白话文就很不错。我花了很多时间看杂书，《红楼梦》我就看了很多遍。

问：您为什么喜欢《红楼梦》，是它的文笔好还是故事情节打动了您?

丘：《红楼梦》从局部到整体都很不错。中国的古典小说，比如《西厢记》局部写得很好，但是没有什么情节。《聊斋》也写得不错，但是整体也不好，缺少结构。《红楼梦》的内容本身反映当时社会上一部分人钩心斗角，不单单表现男女关系。其中刘姥姥逛大观园就非常有意思。整个官场的腐败，写得很清楚，作者是用一个贫民的身份在描述整个社会。我觉得很多地方写得很好。

现在我也看，但时间不多，很忙。以前看得多，尤其中学的时候。我还对历史很有兴趣，看过不少历史书。

问：那您能不能说说您为什么选择数学，为什么不学历史文学？

丘：我对数学的兴趣还是要大一些，另一方面也考虑学文科不好找事情做。我们当时进大学的时候只有香港大学、香港中文大学。我进不了香港大学，因为我是中文中学毕业的。当时中文大学刚成立没多久，假设是文科毕业的话，大概找不到工作。

中文大学在当时香港的社会结构里边不吃香。香港政府只用香港大学的毕业生，所以念理科的话还有前途，要不找不到事做。这是很现实的问题。

问：研究数学的过程中选课题，还有选导师，这些都是很重要的方面。您能不能讲讲如何选题目，特别是有些冷门，有些热门，您怎么处理呢？

丘：这个主要看你自己的兴趣，你要去培养这个兴趣。研究数学要培养自己的判断力。这跟你的导师有关，跟你的朋友也有关系。有时候你觉得有些领域看起来很有意思，可是并不见得真的有发展前途。我在伯克利读研究生的时候，看到 Smale、Palais 他们搞整体分析，但我觉得吸引我的问题不多。所以我看来看去，当时 Morrey 证明了好几个很重要的定理。我觉得很兴奋，因为他是用真功夫做出来的。用一些抽象的方法做，也许会很漂亮，但很难有基本的重要性和深度。

问：您当时念了很多书，知识面很广，所以有整体的看法。对很多年轻人来说，就不是这样了，缺少洞察力。您对年轻人的建议是怎样的，是否劝他们多学点东西，找到自己认为很重要的东西呢？

丘：年轻人要稳一点，不要太急功近利，因为他们很多往往是一下子潜进去，被别人拉着鼻子走。不要为了毕业而去写文章，要真正去咀嚼、考虑问题的本质和重要性。

问：对啊！现在国内的很多学生为了毕业忙着找问题做。

丘：不仅仅是国内的学生，国外的学生也是。国外的留学生很多都是这样子，就是希望找到当时很红的题目赶快做。也不问为什么好，为什么重要。

这种态度是不对的，你要清楚所研究问题的重要性在哪里。你要培养品味。我从小看金庸的小说，书一出来我就看，明报连载每期都看，你总看就会喜欢上了。同样有些学问你看了很多了，你觉得不错，但是不是你真的花时间去思考了呢？金庸的小说很好，你要做文学就要知道文学真正的涵义。

问：如何去培养一种好的品味、判断力，您有什么建议？

丘：这是个很深的问题，涉及整个文化氛围，不单是个人的问题。品味与整个人的素质和性情的培养是很有关系的。Morrey 弹琴弹得很好，Weil、Serre 他们的文学素养也很好。

这个要从小培养，不是一朝一夕就行的。搞数学的人，也要看文学方面的东西。你不看文学，看京剧也可以。这样对提升自己的想象力，还有价值

观都会有好处。有时候你看一幅名画，看来看去不知道它表达什么，可是看得多了就会有更多的认识。多看名著，多看一些数学家的传记，会受到启发。物理上的、工程上的文章，数学家可以找一个突破口去做。你要明白这个问题是否真的值得去做。

问：总而言之就是多看些书和文章？

丘：名家的文章要多看，这个很重要。多参加讨论班和听报告，要去思考名家想问题的方法。还要看名家对这个问题是否感兴趣。有些人讲自己的工作讲得垂头丧气，对自己没有信心。

我刚才讲了，比如我写古文，开始写得不好，可是后来，因为有东西在你脑海里面慢慢地发酵、消化，自然会有进步。

问：有很多中国学生出国留学，您有什么具体建议或者看法？

丘：出国留学没有什么好批评的。可是很多人出去是为了标榜、镀金，希望以后能够耀武扬威。能够真正是为了做学问，出去是好事情，但是问题是有些国外的学校很差很小，根本比不上国内的学校。这就没有意思了。

问：您对美国的教育系统和中国的教育系统都是很熟悉的，您能不能谈谈两个教育系统各自的优点和缺点。

丘：美国的教育注重整体素质的培养。中国学生在创造性方面不如美国学生，这是因为没有人鼓励他们去走一条新的路子。中国的教育总是围着考试，跟在别人后面走。美国更注重培养学生的创新能力。

问：您在科学研究上花了很多时间，教育两个孩子也很成功，您是怎么去平衡的？怎么兼顾各方面？

丘：我在孩子身上花了很大工夫，我不在的时候我太太带。我觉得他们都很不错，我们教导他们对自己、对别人都要诚实。因为这样整个心胸都比较宽广一点。同时我们也不左右他们的学习兴趣，让他们自由发展。

问：那在他们的学习上您有什么具体指点和帮忙？

丘：主要是中文。学业上我也解答他们的问题，有时候推荐书给他们看。一个星期陪他们一两天教中文。他们要做什么运动啊，我们会在一旁看着，表示你比较关心他们。比如说他要去图书馆找书，找不到，很着急，那就帮个忙；还有比如说打球什么的。很多父母跟孩子很少待在一起，孩子就以为你不在乎他们。

问：现在很多家长可能在孩子身上不愿花太多时间。

丘：小孩子觉得你不在乎我，那我也不在乎，就会不上进。

问：我们现在都是独生子女，没有兄弟姐妹共同担负，所以自己的压力也很大。您小时候家境也很困难，您是怎么挺过来的？

丘：这个东西你自己不觉得困难那就不困难了，像我们那个时候连念书都念不下去。我记得很清楚，我那个时候读的是私立中学，学费很贵。我念私立学校，因为那个时候刚好是香港政府改革制度，允许小学生去考私立学校。成绩合格的话由政府交私立学校的学费，我当时考得很差，但刚好及格。培正其实是很好的私立学校。当时是这样的，开学先交学费每月 50 元，到学期结束，学校从政府拿到钱再退还给你。可是开学时我实在交不出来，第一年我自己去找校长要求他允许我不交学费就入学，到年底再补交。那时我父亲刚过世，有些人很势利，说父亲死掉了还要来上学。所以那个时候压力很大。但这又不是你的错，穷有什么关系，开始时发泄发泄自己的感情，慢慢地就觉得很顺了。我就跑去教教小学生、中学生，赚些家教的钱，慢慢地就挺过去了，不是太难的事。世界上的事你尽到你的责任，不要觉得羞耻，又不是你的错。往往事情过了两三年后就挺过去了。那个时候我父亲去世，我姐姐去世，家庭很辛苦，然后我哥哥又大病，家里很不顺。我们住的房子交不起租金，那时候我母亲到处跑，还要照顾我们七八个年幼的孩子。找地方住，找不到，就找香港政府帮忙，找救济处去帮忙。找到一块地，在那儿盖房子，父亲去世的时候他的朋友给了点钱，就用来盖了一个小房子，住进去了。我看到我母亲和我姐姐到处找人帮忙，那时候真的很辛苦，后来慢慢挺过来了。你要多放宽自己的心情，心里的杂念就会少很多。

问：我觉得数学还是很难的。在碰到很难的问题时，您是怎么去做的？

丘：我从来不相信有不劳而获的东西。我有的时候很快就能写一篇文章，有时候要花很久，很快写的文章并不表示你真的才力充沛。其实可能你已经想了很久，刚好碰到这个方法可以用得上。很多时候就是这样子，并不表示你运气很好或者你是天才。我儿子读中学的时候拿着他的课本给我看，我看了两眼就知道怎么解了。他说，爸爸真是天才。其实只不过是熟悉而已。

碰到问题可以跟朋友讨论。有的问题讲讲就想通了。主要看你花了多少时间，要多看、多想、多跟人家交谈，往往都有收获。我的朋友 Meeks 就说他从来没有解决不了的问题，我想是因为他对待每一个问题都花了很多时间去思考。

问：我想问个图形学的问题，您觉得图形学领域里什么是比较自然的问题？

丘：图形学无非就是要识别一张三维的或二维的图。用最简单的方法去描述它。从已给数据出发，你是不是用最好的方法将它完完全全地表述出来。还有最小空间存储、最优传输的问题。这样就有很多自然的问题出现。

问：您的研究领域那么广，哪里来的那么多精力？

丘：就是要多跟别人聊聊天，与他人合作。

数学家访谈

寻找老师人格魅力的细节

刘克峰

刘克峰，出生于河南开封，1993 年获哈佛大学博士学位，师从丘成桐先生。2002 年起任加州大学洛杉矶分校教授，2003—2009 年任浙江大学数学系主任。2003 年起至今担任浙江大学光彪讲座教授、数学中心执行主任。在微分几何、拓扑、数学物理等研究方向取得了大量国际一流的创新成果。他获得过享有盛名的 Sloan 研究奖和 Guggenheim 奖，并在 2002 年北京国际数学家大会上作特邀报告，2004 年荣获世界华人数学家的最高奖 —— 晨兴数学奖金奖。世界著名数学杂志《几何分析通讯》主编。乒乓球高手，现任浙江大学乒协副会长。

没有考 G、考托的哈佛生



能成为丘先生的学生是一个非常偶然的机会。那时我在中科院攻读数学方面的硕士，在国外杂志上发表了一篇论文。中科院的导师看完这篇文章后极力推荐我出国深造，于是他写信向丘成桐先生推荐了我。没想到我很快就收到来自哈佛的回音，而且是快件！我得到了他的肯定！几乎在“一夜之间”，我成了哈佛的博士生，成为一位在数学领域世界级大师的门生。这是我一生中最幸运的事，也是人生中最大的转折。而当时我没有任何语言过关的凭证，没有考过 GRE，没有考过托福。就这么我带着蹩脚的英语去了美国。每当我看到现在很多中国学生为

了出国早出晚归地啃英语、考托福时，我很感谢丘先生，他似乎根本不在意我语言没过关，更没有因为这种“细枝末节”而拒收我。想来这本身就有点本末倒置，没过 GRE 又怎样？主业的研究才是最关键的，语言不过是工具而已。在哈佛学习的 5 年，对先生的崇敬真正渗入我心底，渗入我一生。当年的他如我今天的年纪，正是事业如日中天的时候。每天他的办公室门口都排队坐满了来自美国各地的教授，期待着向他请教或一起探讨一些问题。当看着这些备受尊敬的美国人在我的中国老师面前毕恭毕敬时，我何其自豪，何其畅快！中国人也有扬眉吐气的时候！

被当众训斥的博士生

我自认为在中科院时我对数学领域的研究已经小有成就，进入哈佛后是一名博士生，当然也应该是从事有所创新的研究，而不是如本科生般继续埋在书堆学习前人理论。然而丘先生却说：“还是先多学点东西吧。当你毕业后想再学东西就难了。”我有点懵了，哈佛的博士生难道还不配做研究？我当然不理解，但最终还是遵从了他的意见。若干年后，当我自己也成为一名教授时，我才深深地体味到丘先生当初为我做的决定何其正确。有些教授就一个问题钻研了 8 年、10 年，当他们欣喜若狂地宣称自己终于得出结论时，却发现早在几十年前已有人验证了这一点。我不会再犯这样的错误，因为我几乎阅读了前人所有有关数学方面的论著，在今后的研究中站在了更高的平台上，开阔的视野可以告诉我哪一个研究的方向才能看到阳光。而当我工作以后，每天被各种俗务所缠绕，没有完整的时间再去听一堂课，此前的积累就愈发显得重要。我自认为在哈佛的最大的收获就是学了很多知识，让我受益终身。或许正是因为我所学很宽，曾有一段时间让我变得年少轻狂。一次我在哈佛的课堂上讲课，下面坐着丘先生和其他来自美国各地的教授。数学这种东西，当你某一个问题没有入门时，就会问出如小学生般幼稚的问题。当教授们连续提问后，我觉得很可笑。我不屑一顾地回答道：“These are stupid questions!（这是愚蠢的问题！）”不料台下丘先生勃然大怒，他站起来指着讲台上的我训斥，他说我懂这些问题并不代表我有多高明，而是因为别人没有踏入这个领域。毕业的时候，丘先生寄予我：要敢为天下师。我异常激动。因为对于我这样一个初出茅庐的学生来说，这是宏伟的目标，也是莫大的鼓励。我明白了，先生并非不让我“狂”，但却要我明白，什么是真正的“狂”。

“不耻下问”的学生导师

今天在国内，很多学生因为仰慕某一位导师而师从于他，并且遵从导师研究的方向，于是就有了“一个导师一个门派”之说。然而我的博士论文确

是丘先生从来没有研究过的领域，因为他最不喜欢学生和他研究同一个方向。研究导师都没有涉猎过的领域当然困难很大，可他认为学生就应该有这样的勇气，他像一个舵手，把握最基本的大方向，但究竟该走去哪里，该如何去走需要学生自己去探索。他最高兴的不是颐指气使地指导学生，而是“不耻下问”地向学生提问、请教，沉醉在和学生一起学习的过程中。其实先生是一个“好斗”的人。别人说他哪里不行，他就偏要研究哪样，做点成绩给别人看看。于是他要求他的学生也敢打敢拼，以“天下”为己任。今天我们一起在国内创办数学研究中心，先生已经不会再像在哈佛那样斥责我。他经常会一天给我打好多个电话来探讨一些问题，遇到意见分歧时我们也会闹别扭，甚至几天互不理睬。那时候他会通过好多别的同学和老师来悄悄问我是不是生气了。古人曰：一日为师，终身为父。我想从 16 年前开始就注定，我将与恩师一生同行。

编者按：本文由刘克峰口述，俞熙娜整理，原载于《钱江晚报》。

数学家访谈

现在是做学问的很好的年代

——萧荫堂访谈

萧荫堂，美国国家科学院院士，美国哈佛大学教授，1943 年出生于中国广州，1963 年毕业于中国香港大学，1966 年获美国普林斯顿大学博士学位。在 1996 年至 1999 年间担任哈佛大学数学系主任，是首位担任此职务的华裔。1998—2000 年担任美国 National Research Council 与国家科学院的全国数学委员会主席。1998 年获选为美国艺术及科学院院士。2004 年当选中国科学院外籍院士。

整理：季理真、杨静

访谈时间：2004 年 7 月 27 日

访谈地点：浙江大学数学科学研究中心

问：萧先生，您好。我们这次采访的目的是想问问您，作为一位国际知名的数学家，对学习研究数学的一些看法和建议。您能不能先介绍下您的背景？您是如何爱上数学的？为什么要学数学？

萧：我以前在香港念大学，当时香港执行的是英国的制度。英国的制度就是说，你进去就没法改专业了。其实在我很小的时候，我在澳门念书，那时中国刚解放。以前我的老师总是说，要建设中国，要去念工程，那个时候也认真地考虑要念工程，我在培正中学的同学毕业后大部分都去念工程，可是我感到工程学科比较乏味一些，问题很多，计算很杂，我不是很感兴趣。我有两个和我很好的中学同学，记得那时我们三个人都进了数学系。那时候香港大学专业不是很多，他们就去了加州理工学院，开始读电机工程，后来一个改学物理，一个改学数学，可是他们自己也觉得与他们的个性不大适合。我想每一门学科都很难，如果要真正做得好的话，主要就是看个人的爱好，喜欢做哪一方面的工作。我不知道如果我选择读其他的学科会怎么样，人生不

能回头再来一次。我现在在美国见到的年轻人，可以选择的专业比较多，而且随时可以转变。我对数学物理这一类比较客观的、偏重计量方面的学科兴趣很大，所以就选择念下去，我觉得很开心。当时对我来说，数学不见得是最好的选择，但也不能说不好，反正既然选择了数学就一路走下来了。

问：如果让您重新选择的话，是要选择数学还是要放弃它？

萧：这个我就不知道了。因为如果我身处于不同环境，当然就会接触到不同的东西，受到不同影响，后果就很难讲。就学问来说，某个时候可能某一门吸引力比较大一点，我中学的时候，数学物理对我的吸引力比较大。当时中国有杨振宁、李政道拿了诺贝尔奖，苏联的卫星也升上天，美国也在加强基础科学投入。那时候基础科学在我看来，主要是指数量性质方面，而生物学侧重于描述，比如分类。物理数学可以对底层有基本的了解，对我的吸引力比较大。当然现在许多学科都得到了发展，生物也能够对本质有深入了解。我还觉得现在跨学科的研究越来越普遍，分界线就没那么明显。比如生物化学是两门学科合在一起的。我有些朋友改到另外的专业，甚至是完全不相干的领域。我想现在是做学问的很好的年代，令人振奋。如果能够兼任的话，会体验到很多新的机会。

问：您有没有把数学运用到某些其他的领域？

萧：我有很多朋友从事不同的行业，大家在一起聊天，交流意见，不过没有真正深入地做过数学应用。通常学问都是分为好几层次，就像金字塔，基础一定很广。在如哈佛之类的比较综合性的大学，你会接触到很多人，谈很多东西，了解到很多方面的知识，知道某些问题的困难在哪里，需要掌握哪些工具。可是如果你真的要深入去做研究，取得好的可以发表的结果，那就要花很多时间。年轻有精力当然最好，我上年纪了，很多时候就觉得精力不够用，有很多东西想研究。人都是一样的，总有很多想做的事情，所以要排列出一个先后的次序。有好的机会的话，可以跟别人合作。

问：您当时去美国留学的时候，中国学生是不是很多？

萧：中国内地去的好像不多。以前内地要出国是很不容易的。20 世纪 50 年代末、60 年代初期，我在香港看到很多难民。那时我正在念大学，很多大学生就去帮这些难民，因为逃难的时候他们什么吃的东西也没有。那时人们一天到晚问别人你昨天的大馒头哪里买来的。每个人发一张粮票，一天可以买一个。大部分时间都花在忧虑如何吃得饱一点，心根本就不在学习上，所以那段时间内地出国的几乎没有。我去美国的时候，有很多中国台湾、香港的留学生。后来到八九十年代，台湾经济腾飞，有很多人回去了。内地出去的留学生要到八几年才开始多起来。我记得彭家贵是第一批去的。

问：有一个问题，就是香港出去的留学生中好像有很多成了杰出的科学家。香港地方并不是很大，人口也不是很多，怎么解释？

萧：和人口、面积没有关系。现在内地出去的学问做得比较好的也已经很多了。我们到读书年龄的时候，刚好中国解放。我们的老师以前在内地，解放以前就离开了。我也是 1949 年离开内地的。那时候战火快要蔓延到广州了，我爸说要离开。打仗通常就是掳掠、抢劫，所以平民都希望离开打仗的地方，等打完了再回来。解放军快进广州的时候，我爸说我们坐飞机去香港。小时候听到坐飞机很兴奋，从广州到香港就一个半小时。那时候坐飞机不太舒服，不但小而且颠簸得厉害，而且螺旋桨震动得很厉害，我那时没坐过飞机，而且家里东西都没有收拾，因为想是临时出去避一避，顺便去香港玩一下，打仗结束就回来。我爸出去打听过，解放军和以前的军队不一样，不抢劫。我爸是商人，后来我们在香港一待就好几十年没回去。有一次苏联在广州办了一个展览，我和哥哥两个人偷偷去看了，我第一次见到电子显微镜，那时候我和我哥都还不到 10 岁。我爸在香港做生意，他可能觉得香港是比较适合做生意的地方，但不适合小孩子住，所以他就送我们去澳门，说澳门比较平静，小孩子可以玩的地方比较多。我刚念完初中，每个礼拜到了周末就从澳门回香港去，坐船只要 3 个小时，通常都是晚上坐上，第二天一早就到家了。那个时候，我们听说内地很安定，于是我和哥哥一起回广州老家看望亲戚。那次之后就一直没有回老家了。很多比我们年纪大的人都回国上学了，我们有很多次去送别，他们坐船回内地，都是到广州、南山、虎门的。

问：回内地念书？什么原因呢？是内地学校质量比较好？

萧：澳门没有大学，香港的大学很难进，要么就去台湾，要么出国。很多人不想去台湾，也没机会出国，所以就回内地上学。那时我的很多老师都是从内地来的，至于香港教师的待遇，如果达到香港政府承认的资格，薪水会很高。其中一条就是必须有英联邦大学的学位，比如英国、加拿大、澳洲。所以我的很多老师不够资格，无法到公立学校教书，就跑到一些私立学校教书，这对他们是比较吃亏的，因为他们其实水平很高。对我们学生来说就很幸运。他们学识很广，经验丰富，所以教我们的老师都很好。当时培正中学出了很多人才。比我低几届的丘成桐，高我几届的伍鸿熹。郑绍远和丘成桐是同班同学，还有王必敏，崔琦好像是比我高三年的。

问：培正中学的教育是什么特点呢？

萧：主要是两点。第一是老师水平高，二是同辈的人好学奋进，和当时的学习气氛有关，所谓"良师益友"。那时香港的教育制度是英国式的，用英语教学。汉语他们不看重，而且要找工作，不是英语系统出来是很困难的。我有个要好的同学，他爸爸和我爸爸是生意上的伙伴。有一次，他爸对我爸说，

现在形势不同了，最好让孩子去念英语。可是我父亲对他说，堂堂中国人怎么可以学英语。后来我哥哥中学毕业后找工作遇到了很大麻烦，我父亲也就认命了。我有一个哥哥，三个弟弟，两个妹妹，后来弟弟妹妹们都去念英语。当时很多家长和我爸的想法一样，送孩子到培正去，那里是中文教学的。培正中学很少有学生能够去香港大学，虽然后来我进去了，但我们的英语程度和其他用英语教学的学校的学生相比还是有差距。

培正中学第一个进香港大学的学生现在是 AIG 保险公司最高层的人物之一，AIG 是全世界最大的保险公司，在香港他们有个 AIG 的大楼。他比我高四年。进香港大学之前要先参加一个培训班，念一年英语，崔琦也去过，但后来没有进香港大学就直接出国了。我没有念就直接进港大了，和我一起的还有另外两个同学。后来到了香港中文大学成立，就没有了这个培训班。那时很多去国外念书的同学写信回来告诉我们国外学习生活的情况，对外国的情形了解得多了，整个视野就不一样，出去念理工的人比较多，年青一代看到前人走的路，他们会觉得这是该走的路。这股风气对理工方面的学生影响比较多，学生们一起切磋，发挥才能，后来出了很多有成就的人。

问：您能不能谈谈当时出国前后的情况?

萧：我在香港大学读完三年就去了美国。英国大学制度是三年的，中学是七年的。香港大学是比较小的地方，所教的科目不多，人数也不多，所以我和老师的关系很密切，经常当面交流。一年级时参加讨论班，大家一块看文章，做报告，很有学习气氛。

问：您为什么大学一年级就开始参加讨论班了?

萧：因为课程不多，人也不多，大家都认识，我和老师很熟，他们中大部分是从外国回来的。那时念完就去了明尼苏达。我本来想去德国读书，第一年学德语也是因为可以选的科目不多，只有两门数学，有一门还是给不针对专门学数学的人。我要念四门，就选了德语，本来是要学英语的，可是我英语考得很好，就免修了。我想念法语，学科的院长也批准了，我排一门专门的数学课、一门一般的数学课、一门德语、一门法语，可是院长对我说，这里不是幼稚园，我当然知道这不是幼稚园，这是大学。这两科德语和法语，就好像小孩牙牙学语，我相信德国和法国的幼稚园说不定比我认得更多单词。其实如果我一定要念的话他也没有办法，因为没有违反规定。后来我又念了一个中国文学。

我在念德语时的德语老师，他是德国领事馆的人，后来和他很熟了，他对我说香港大学老师的薪水都是香港政府的钱，他拿德国政府的钱，德国政府请他传播德国文化。他希望我去德国，但那时没人想去德国，我就觉得德国不是很好。那时是一九五几年，当时有个德国留学回来的老师，我跑去问

他德国生活怎么样。他是战后去的，和我说生活很艰苦，每天就是清水面包过日子。我想了很久，就和那个德语老师说可不可以不去了，他不明白，说已经安排好了为什么不去。我说是因为听我的朋友说，那里生活艰苦，每天清水面包过日子。德语老师很幽默，说这不奇怪，德国是有一些奖学金，规定得这种奖学金的人只可以吃清水和面包，可是你不是那种。他全给我安排好了，我还是没有去。

后来我看没有地方可以去，就想去美国。可我连申请表格也没有，我知道我一个同学想去美国，我就问他要了一些多余的表格。我的一位老师王教授建议我去明尼苏达，他认识那里的 Guggenheimer 教授，是做微分几何的。他还帮我写推荐信。到了明尼苏达大学后，我打听到 Guggenheimer 要找几个 RA（研究助手），于是去找 Guggenheimer 的时候问他我应该读什么，可能王教授的信写得太好了，Guggenheimer 说你在国内已经学了足够多东西。后来我选了卡拉比教的复几何，Gilbarg 教的 PDE，Gilbarg 现在已经过世了。卡拉比讲课的时候只有我一个研究生，其他都是博士后或教授，课程进度很快。我那时候是不大听得懂的，因为大学本科出来习惯写得清清楚楚。我上课以后到他家吃饭的时候把他的讲义借过来看，我问他问题，他可以很仔细地解释清楚，算得也很快，我特别佩服。记得有一次我拿着一个考虑很久的 Bergman 核的问题向他请教，我觉得这个 Bergman 核一定是写不出来的。可是他马上就告诉我应该怎样算，而且很巧妙，我觉得他非常了不起。他教给我很多东西，当然我那个时候懂的不是太多，后来才慢慢把细节了解清楚。后来卡拉比去了宾夕法尼亚大学。

问：卡拉比离开时是不是他当时工作的顶峰？什么时候是他名望最高的时候？

萧：他现在 80 多一点。他很厉害，有很多新颖的想法。他要离开时，我没有去送他。那时是冬天，太冷了，我没有车，从学校到住处要走两条街。我那时想去普林斯顿，于是去找 Gilbarg，他很欣赏我，所以推荐信写得很好。我又去找卡拉比写，他说其实他也不知道我学得如何。因为他的课不考试，他和我说，以前有一次这类考试，给了 ABC，后来没有拿到 A 的都不来了，所以现在坐到这里的都给 A。其实他是个有心人，他和我谈问题，讲了好几个小时，他也没问我一道题目，他就一直讲。我等不及了就问他还写不写推荐信，他说写。我并不知道他的推荐信写些什么。那时候 Bochner 管普林斯顿数学系的招生，他在正式公布前很早就给了我一封信，“你在我们的申请者列表中非常靠前”。所以我觉得机会很大，后来我去找卡拉比道谢，他装作很吃惊的样子，问我为什么要送礼。他还说他在推荐信里写我最多就是平均水平。我想他应该是在开玩笑，他是很有幽默感的人。后来有一段时间我还犹豫要不要去普林斯顿，因为有些朋友说那里竞争很激烈。

后来我跟卡拉比说我不去普林斯顿，他说不如去宾夕法尼亚大学跟他算了。Gilbarg 跟我讲普林斯顿很好，向我推荐应该跟哪些人学，叫我不要怕难。后来我还是下决心去了普林斯顿，开始的时候跟 Nielson 学，他研究数学物理。我后来跟着 Gunning 做博士论文，Gunning 学生很多，很多东西我都跟同学一块学。那时 Fulton 也在那儿，他年级比我高。当时没有研究生的基础课，都是研究水平的课，学生要学东西就自己组织一个讨论班。

我们几个一起打网球，一起念书。那时的同学中有几个现在还在做数学，我在数学会议上有时会见到他们。有一个同学去了政府做事。我认识的一个学生，他现在和 James Simons 一起在做生意。还有 Richard Hamilton 也是 Gunning 的学生。很多同学谈的都是水准很高的问题，他们很乐意和我谈数学问题。吃早餐的时候，有些就说我昨天晚上证了一个大的定理，然后向大家解释，当然很多时候是错的，但气氛很好。而且与不同的同学交谈就能学到不同的东西，反正有问题不懂了就问别人，这个问题解决了吗？有什么重要？相互取长补短。

问：您毕业后的第一份工作是在哪个学校？

萧：我第一份工作是在普渡大学。我本来是想多念一年才毕业的，我想多出一些成果，争取拿一个 Fellowship，不要忧虑钱的问题，可以安心做学问。之后我就跑到普渡去找了第一份工作。那时跟 David Drasin 同一个办公室，他是搞值分布理论的，我跟他学了很多值分布的东西。后来我也做了一些跟值分布有联系的研究。我的博士论文是做凝聚层的，我毕业的时候做的结果，差不多做完了，有些文章发表，有一篇投给 Borel 发到 Annals 上，有一些很有意思的结果，所以很多地方邀请我做报告。我本来想去哥伦比亚大学教书，因为我太太也想去那里。可是首先给我 offer 的是耶鲁，我去耶鲁大学不久，哥伦比亚大学也给了我 offer。

问：您后来是什么时候去斯坦福的？

萧：说起来是因为天气的原因，差不多是 31 年前的事了。有一天下冰雨，路很滑，在一个礼拜天的晚上，有一个聚会。我有 2 个儿子，我的大儿子那时刚出生。我离开家的时候路上还是可以行车的，可是到回家的时候，那路完全像溜冰场一样。有一个比较陡的地方，我开车没办法上去，只好回头。那时候我大儿子刚出生，家里有很多事要做，我爱人很着急。我说我不是不想回，是回不来。有位牧师说开他的车送我回去。车子到陡的地方就不能动，因为那个路不是完全平的，是中间高，旁边低，他那个车也是根本没有办法行到路中间，因为一滑就滑到边上去。我就下来帮牧师推，推了很多次。我记得推到第 5 次，车子在动的时候，我站不稳倒下了，我的头碰到了他的车子，不省人事，很严重，牧师就找救护车，可是救护车也开不过来。还好牧师

的家不太远，他就扶着我去了他家，第二天早上，就送我去医院。后来有一段时间我觉得身体还是不太对劲。直到两三个礼拜以后才慢慢康复。主要是那起意外，没有办法，我们就开始考虑离开了。我想是因为丘成桐在斯坦福的原因，他建议我去，所以我就去了那里。1978 年的时候在美国东海岸刮了一个星期的飓风。后来我太太写完论文，她想教书，可是斯坦福旁边没有学校，好像只有一个小学校。然后就开始考虑离开了，那时普林斯顿、麻省理工、哈佛都给我 offer，普林斯顿跟斯坦福情形一样，周围学校很少，普林斯顿有很多人的研究领域和我相近，比如 Kohn，Gunning，Stein。哈佛的学术气氛很好，学生也出色。虽然人数不多，但是访问学者很多，水平都很高。我想这种学术气氛与学生自身的勤奋一样都很重要。中国人才那么多，每一门每一科都可以发展。不管是数学、工程，应该都会有很大的发展前途。

问：有个问题很奇怪，中国跟印度比，中国的经济条件并不比印度差。印度的 TATA 研究所自己就培养出很不错的数学家，现在发展很好，好像中国就差些。

萧：印度 TATA 是比较悠久一点的，中国有一个最大的问题就是以前的整个局面不稳定。学术是要安心才可以做的。如果你去做模仿的事情，比如去工厂里面装配什么东西的话，你压力多大也没有关系，反正你加紧做，都是重复的机械劳动。可是你要做出创新的东西来，你的头脑必须安定下来，不分心才可以。

现在我也觉得中国发展得比想象的快很多很多，因为我第一次从美国回内地是在 1979 年，刚好改革开放的时候，我在北京做了几个学术报告，后来放在一本书里。现在发展这么快这么好，前景应该是很好的。

问：现在美国大学数学系一般有多少学生呢？

萧：要看哪一所学校了。哈佛的本科生比普林斯顿的多，但比 MIT 少。哈佛数学系的学生我想总共加起来是一百多一点。

问：在哈佛您给本科生上课吗？

萧：我去年就教一个班，有很多人都是在奥林匹克数学竞赛上取得很好成绩的。我教的时候有两个任务，一个是让他们不要闷死，一个就是说不要让他们觉得太难，要保持他们的兴趣。我花了很多时间为他们出习题。期末考试的时候，我有一次从 Michael Artin 的 1958 年的文章里拿了一步出来作为考题，其实那是最重要的一步，放在那儿做他们大考的题目。我放了一些暗示在里面，他们差不多都做出来了。

这一类课程培养的本科生，将来很多人会做数学。有一点奇怪的是，学生们一开学的时候都很熟了，我问他们是怎么认识的，他们说中学、小学的时候已经在一块儿参加数学竞赛培训了。

问：您在美国生活很久，是不是感觉到有的时候有点孤独？

萧：当然会有不是自己故乡的感觉，因为记得最多最亲切的还是自己年轻时候的地方，在外国这种情形更明显。我很多时间都在澳门，回去之后也不一样，如果景物一样的话就记得比较亲切。我回香港，香港现在变化很大了，我在念香港大学的时候太太比我低一年，她住的地方离香港大学也很近，那个地方完全都拆了，拆了重建，唯一没有改的是旁边的公共厕所。我跟她坐车经过见到厕所，虽然对厕所也没有太多感情，但是感觉不一样。香港大学是我们一块儿念书的地方，所以很亲切，那里的大礼堂差不多是辛亥革命时候建的，一直保留下来。当然我也很喜欢波士顿的学术环境。

问：不过现在的中国，学数学的人好像多起来了是吧？

萧：如果大家都觉得某一行业赚钱容易，出路好的话，就可能人数过剩了。生活如果不是太难，你也不需要很多钱，那么学术也许是很好的选择。主要是整个文化氛围、学术环境，是要花时间慢慢培养起来的。

问：您到杭州来了几次？

萧：这是第三次，第一次是 1979 年的时候，中国刚改革开放。1981 年左右，我组织了一个会议，出版了一本会议论文集。那时候是华罗庚组织，他托我在外面帮他联络一些人，因为那时候和国外的通信很慢，现在有 E-mail 什么都比较容易。以前寄信、打电话很贵，要写信要先找地址，要知道他是在哪个大学，有时候认为那个人在哪个大学，其实不是，他们或许已经离开了，因为消息没那么灵通。

问：那本文集好像是您编的？

萧：我是其中一员。编辑有一个任务是需要催人交稿，那时候联络比较慢，可是那次会议办得很好，很多人来，不单是学术方面，还有个重要的因素就是大家建立良好的关系。因为刚改革开放的时候，联络费时，但如果互相熟了之后就比较容易安排，所以现在想看到的还是中国整个的学术文化氛围的改善。

问：您现在每年夏天都回香港大学吗？

萧：是的，我一有机会就回去。去年因为 SARS 没回。

问：您家人还在香港吗？

萧：我有一个哥哥和一个弟弟在香港。我弟弟没有结婚，他和我妈同住，请了个印尼的佣人在照顾。我哥哥已经退休了，他已经过 60 了，香港差不多到了 60 就退休。

问：您在家里是排行多少？是兄弟姐妹当中成就最大的吧？

萧：我排行第二。我父亲是商人，我弟弟是医生，还有两个妹妹，都在加

拿大。我是在广州出生的。

问：您是中国人的骄傲。您对中国的年轻人有什么期待？

萧：不要这么客气地叫我。中国人才很多，不仅是努力，机遇也很重要，因为老一辈的都退下了，年轻人上来了，所以中国的未来都要靠年轻这一代了。

问：是不是香港人里你们这一代杰出的人比较多，后来就比较少了？

萧：因为我们以前读书的时候对数理方面兴趣大，读理工科是兴趣，后来慢慢改了，整个社会看法都不一样了，都去念经济。尤其是香港，因为它是金融中心，对经济人才比较器重，学数学理论的就比较少些。计算机和生物也吸引一些人去念。这是好事情，因为各方面都要发展。中国人口这么多，也希望各方面都出人才。我有一个朋友在中国台湾，家里都希望他读医，可是读完之后他还是回头了，又回去做数学。如果你真的有兴趣，那么关系不大，学术领域其实最重要就是有真正全心投入的人。人多不一定好，宁愿人少些，质量高些。

王元院士谈心目中的华罗庚

黄艾禾

黄艾禾，著名媒体人，曾在《三联生活周刊》、《中国青年》、《中国新闻周刊》、《国家历史》、《财经》等杂志担任主编或总监。

我国著名的数学家、科学院院士王元，花费八九年的时光，写了一本数学家的传记，这本书就叫《华罗庚》。说到科学家的传记，我们已经见过很多了，但是由一位著名的数学家来写另一位著名数学家的传记，还是头一次见到。说到本书的写作，王元先生不无自信地说：因为只有我，对他尤其是对他的数学工作最为了解。

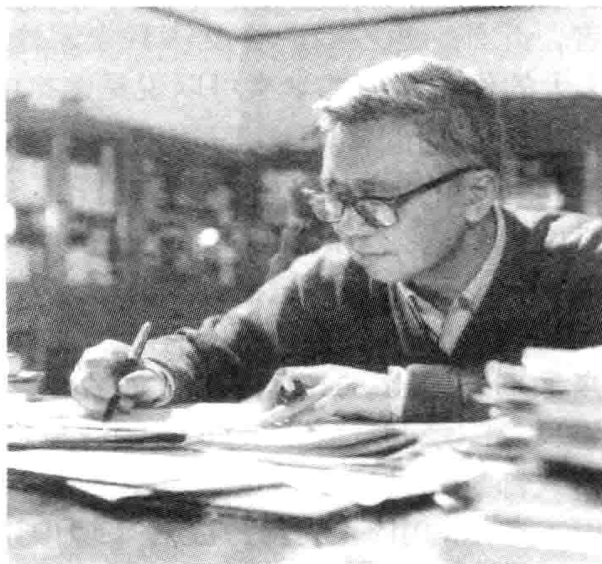


华罗庚与王元

王元先生是在 1952 年大学毕业后，由国家分配来到中科院数学所师从华先生的。从此，他与华罗庚先生结下了不解之缘，风风雨雨 30 多年，自己也

成长为一代著名数学家。可以说，他是当今这世上最了解华罗庚的人，应该也是写作华罗庚传的最合适人选。

王元先生说，中国的数学在古代曾经很先进，但是到了 13 世纪以后，就开始落后了。当时西方已经开始有了微积分，而中国人还在搞古典数学。虽然后来有传教士传进来一些近代数学，但是都很零零碎碎。中国近代数学的真正起步是从 20 世纪 20 年代开始的，当时中国有一批留学生到美国、欧洲和日本留学，学习了近代数学的知识再回到国内教学生。所以中国的数学起步晚，水平不高。真正使中国的数学走向世界的，是两位中国数学家，一位是华罗庚，一位是陈省身。他们是两位奇才，他们当时的工作达到了世界先进水平。



华罗庚

王元先生说，从数学领域来说，大致分为两个：一个是分析，一个是代数。绝大多数的数学家一般只在其中一个领域里做出贡献，比如我自己，就是在分析方面，但华罗庚却在两方面都有很大的贡献。另外一方面，数学又分成纯粹数学和应用数学，华罗庚也是同时在这两方面都有很大贡献。在美国芝加哥大学科技馆的数学馆里，用不锈钢镌刻着当代最杰出的数学家们的名字，共选了 88 名，其中就有华罗庚的名字。此外，华罗庚先生是美国科学院和德国科学院的外籍院士，国外许多大学的名誉教授。

说到这里，王元先生说，在中国内地工作的数学家里，华罗庚是最伟大的。

王元先生介绍说，算起来，他开始写作《华罗庚》大概是在 1985 年。当时华罗庚还在世。在此前，胡耀邦同志曾经写过一封信给华罗庚，希望他能写一个回忆录，把他的经验告诉后人。王元说：后来我对华罗庚说，将来有时

间我要帮助他写。在他去世前不到一年，有一天我说要到他家去商讨写传记的事，他就在我动身之后没到他家前，写下了一个简短的自传提纲（在《华罗庚》书中有收录），但里面只是讲到了他的数学工作。等到我开始写的时候，我觉得不能只写数学。为什么？我觉得华罗庚的一生有两点特别打动我：一是他自学成才。他只上过初中，即使到了美国伊利诺伊大学当教授，他的履历上也只有初中的文凭。这一点对中国的年轻人奋发向上有特别大的鼓励；还有一点就是他的爱国，他第一次是 1937 年在英国的时候，正值抗日战争爆发，英国人要他留下教书，他却毅然放弃这些，在 1938 年回国，到了西南联大与同胞们共患难；他第二次是在美国，已经是伊利诺伊大学的终身教授了，但一听到新中国成立的消息，便带领全家急不可待地返回祖国。他的这种爱国精神可以说是推动我写书的巨大动力。

王元还告诉记者，此外，也没有一个外国数学家能像华罗庚这样对本国的数学事业发生这么大的作用，他的学生可以说是遍布中华。

王元写这本书可谓困难重重。其中最大的困难，是查证历史资料。翻开《华罗庚》，可以看到每一章的末尾那长长的参考书目、文件的目录。有人曾惊异地问他：你怎么能搞到这么多的材料的？王元说是下笨功夫，一点一滴地坐在图书馆里大海捞针。王元告诉记者，与文学家写传记不同，这本书里不会有一点虚构的、所谓想象的东西，他所有的描述都有出处，他以数学家的严谨与坚韧不拔来做到这一点。比如，在“文化大革命”中江青曾经有过一次“批示”，说“谁反对陈景润谁就是汉奸”，她这是想借陈景润来打击华罗庚。数学所有好几百人都听到过这个传达，但是他查不到文件的原件，查不到原件，他就不能用。类似的事情还有好几起。因为国内图书馆的条件有限，他就利用到香港交流讲学的机会去查香港的图书资料。白天他参加数学的交流讨论，晚上和休息日他泡在图书馆里。“那真是大海捞针，半天捞个小小的芝麻！有时候查上一整天，一无所获。”王元说。

所以，这本 30 万字的书，王元竟写了八九年，其中大部分时间是在找资料。当时又没有互联网，可以想见这里的工作量有多大！到了动手写作时，他又没有专门时间来写书，只能插空安排，自己订出自己的时间表：大约每年写出一至两章。“可能读者读起来会有点互不连贯的感觉，这实在是因为这些章节都是分别写成的。”

我问王元：“你怎么不找一个助手？”

他说：“这是我的个人习惯。我从来做事情都是自己做。我也不希望我的事情没做完时被别人知道。那时候我写书时，连家人都不知道我在干什么。事没做出来，就只有我知道。”王元的书共写了两稿，第一稿大概有 40 万字，但他全部推倒重来。“这也是我的习惯，我写书都是这样，第一稿只是理清思

路，建立框架，第二稿才可以。”

《华罗庚》第一次面世是 1994 年，由开明书店出版。最近，《华罗庚》的修订版由江西教育出版社出版了，而且，以出版自然科学著作著称的德国施普林格出版社出版了《华罗庚》的英文版，该社的《华罗庚》日文版也在翻译出版中。

《华罗庚》出版以后，共印了 27000 本，其中中国台湾的九章出版社印的繁体字版本在台湾一地就卖了两千本。台湾图书馆 1994 年就将其收入馆藏。海内外的知名科学家钱学森、杨振宁、苏步青、陈省身、丘成桐纷纷致函王元表示祝贺。

王元说，明年是华罗庚先生的 90 诞辰，他还要出一本书，主要是外国人对华罗庚的研究纪念文集，由科学出版社出版。“读这本书，会让人有一种惭愧感，外国人对华罗庚的研究比我们更重视、更深入。”

编者按：本文原载于《中华读书报》。

数学与物理的抉择

——专访姚鸿泽教授

姚鸿泽，1981 年毕业于台湾大学数学系，1987 年获得普林斯顿大学博士学位。目前为斯坦福大学教授。2000 年获得庞加莱奖及麦克阿瑟奖，2001 年选为美国艺术及科学院院士并获得晨兴数学金奖，2002 年获选为台湾中研院院士。其专长在于概率论、统计力学及量子力学，对多体复杂系统的物质稳定性问题有重大贡献，该项工作为天文物理中星球稳定性问题提供了坚实的理论基础。

策划：刘太平
访谈：李莹英、尤释贤、陈俊全
整理：李莹英、陈俊全

自修数学

李：我知道你在高中时，就读了一些大学的教材。请问是什么时候开始自修的？联考时，为什么会填数学系作第一志愿呢？

姚：高一下学期吧！一开始念 Johnson 微积分的中文版，念到级数时有点糊涂，所以又重新开始。后来继续念了下册，这样大约花了一学期。接着读了两三本线性代数，也大约花了一学期。因为我觉得微积分后面的部分读得不是很好，想重读，一个朋友建议我直接读高微，所以就读了高微，另外又读了群论和环论，这时差不多是高二结束的时候。这期间我也读了普通物理和力学。但是当我想继续读进一步的书籍时，因为大多是原文书，英文实在太多，无法读下去。到了高二暑假，决定重读高微。那时选的是 Apostol 的书，书中的习题除了最后一、二章外基本上每题都做完，这大概是高三上学

期。我也尝试看实变，但看不懂，因为太多 measure theory。我那时花了很多时间在这上面，蛮可惜的。在高中时，令我觉得很高兴而且对我帮助最大的是 Apostol 的习题全做了。后来在大学的分析通论课程中，我把实变的习题也都全做了，这对我的帮助也很大。

联考时，只考虑选数学或物理。因为我读的数学书，远比物理要多很多，而 19 世纪的数学很吸引人，不但容易上手，也很容易发现它的趣味，这大概是为什么我会选数学的原因。

李：在自修时，怎么知道要读什么书呢？譬如说你很清楚高微之后要读实变，选的书也大都是有名的教科书。有人提供你这些协助吗？

姚：第一本书是随便买的，之后看书本后面的 reference 就晓得要找什么书了。会读 Apostol，是因为我的高中数学老师提过这是他们以前的教科书，我很好奇，就买来看看。基本上，我高中时自修大学的教材，没什么困难，但在大学时，我自修研究所的课程就有些困难。

李：为什么？是当时杂务太多吗？

姚：不是，研究所的数学，不应该只是直接拿书来读，也应该找些题目来做，同时读些 paper，这样才会有自己的方向。

李：你高中做 Apostol 的习题，难道没有碰到困难吗？这本书对大部分大学生都有些困难。

姚：我每天也只能做一两个困难的题目。简单的题目很快就可以做出来，难的题目，就要花两三小时去想。

李：那时每天都花多少时间读数学？

姚：高一、高二时，一天至少花 10 个小时读数学吧！每天在学校的时间，大概可以读 5 个小时，回来后差不多也可以读 5 小时。

李：这也是因为兴趣所在，方能如此吧！

姚：也不全是，因为高中太无聊了。学校的课程并不吸引人，又必须坐在那里，没有其他的事可做，所以只好读自己的书。

李：当初又为什么会开始自修呢？是对数学特别感兴趣吗？

陈：对呀！可不可以说一下你什么时候开始对数学与物理这些题材感兴趣？

姚：我对数学产生兴趣是很早的时候，初中开始就自己去找书看。那个时候不是有很多几何作图的题目吗？我就去买一大堆书，因为实在也没什么其他事情，便把上面的题目几乎全部都做完。不过初中的时候遇到一些困难，所以没有自修高中数学。由于对几何很感兴趣，想去读更深的题材。可是家里什么书都没有，找到我爸爸的一本范氏大代数就拿来看。看到书上写 A_1，

我搞不清 A 底下一个 1，是什么意思。去请问数学老师。数学老师说：唉，不要读这一本。由于家里也没有其他的书可以看，只好就算了。所以当时在初中是无法读那些题材的，一直要到高中才慢慢没有这些问题。那么高中为什么会开始自修数学呢？高中数学书上讲到的一些我总不是很满意，它后面好像还有很多东西没讲清楚，所以我就去找一些书。因为高中数学很快就念完了，接下来已经没什么可看，于是就去读微积分及其他更深的书。像我这样在高中时自修，其实没什么特别。中国台湾数学界很多人都是如此的。我想这其中对我个人影响比较大的，就是找一个题材，把所有的习题，真的从头到尾都做完。物理方面我也读了一些，可是后来读不下去了。我读了几百页，才知道普通物理比较难念。后来也才知道物理跟数学不同，物理不是那么有前后逻辑性。

尤：这是否因为读物理的人常说 intuition（直觉）？这跟数学家所说的 intuition 是否不同？

姚：学生时代，intuition 的问题还不到你说的地步。当时的问题第一个是英文不够好。第二个则是物理其实比较没有办法自修。物理比较需要别人跟你讲一讲，它不是完完全全的逻辑。在论证或说明一个现象的时候，它中间有很多步骤其实有很大的 gap。这些 gap 和许多更深的东西有关，它先把它们略过去。因此，你在读的时候就没有办法说服自己它是对的，读不懂也是有道理的。可是如果有老师在旁边讲解，或有人告诉你，这些中间过程是有些不完备的，你就先相信它。那样你就可以很快读过去了，不会卡在那边。那时力学是念起来最没有问题的。一直念到热力学实在读不下去，就只好放弃物理了。后来再对物理有兴趣，是大学的事情。到了大三时，对数学比较没有兴趣，开始觉得读不下去。同时也常常感到奇怪，很多东西明明不需要去证明，为什么还要去证它呢？可能当时有些东西我也没有看到和想到吧。

大学时期

李：在大学时，你自修研究所的课，遇到困难，有寻求协助吗？还有大学课程已经先自修了，那么上课的状况如何呢？

姚：大学时我是在浪费时间。虽然高微是自修了，但毕竟还有些细节上的问题，所以考试成绩并不特别好。大学时读过微分几何、实变、复变，而代数也认认真真地读过，能完全了解它在做什么。

陈：你刚提到有些东西觉得不需要去证明，像高微那些你觉得它们需要证明吗？

姚：问题不是出在高微，高微、复变等等，这些没有问题，代数也还好，我的问题是在像拓扑、几何的科目。

我觉得当时读的几何是空的，只是一些定义 (definitions)，完全没什么意思。微分几何还是应该拿一个具体的问题来做，像曲线曲面。后来又读了一些比较一般化及形式化的题材，它们被 formulate 成几乎是不能计算的东西，这让我到了大三时，已经不太想读数学了。比如在学拓扑时，书上证了半天就是证一个东西是 sphere。整个拓扑讲了半天，没什么例子，说来说去就是 sphere，这是很严重的事。没有例子你就不晓得自己在做什么，也不晓得为什么要做那些东西。当时定义 homology，由 simplicial complex 开始。其实仔细想想，homology 是一个简单的观念。但是我记得当时为了定义什么是 homology group，就搞了将近七八十页，然后一个学期就完了，真正 homology 能计算的东西还是碰不太到。所以那时候觉得每学一个东西，好像都很高深伟大，都要学一个或至少半个学期才知道定义是什么，可是真正能计算的例子又很少，这是不对的。也许是性格上的关系，我比较没有办法去接受太形式化的东西，比较喜欢看到一些具体活泼的东西。当时读到 Jordan 定理，很多人认为这是很困难、很深的定理。可是到现在，我仍不认为平面会被一条曲线分成两部分，需要证明。当然，问题是什么是曲线。不过若觉得一件事情是 always true 的，却花了一学期去学，目的只在证明它是对的，总会让人觉得浪费时间，所以当然读不下去。现在想起来，拓扑和几何是重要的，可惜当时没有人跟我们讲它们真正的用处。举例来说，几何最重要的当然就是 Einstein 方程，从这个方程去看，就会有很多有趣的题材。但当时传统的题材，说来说去都还是 sphere。我当时问了很多老师，为什么数学学了这么多，可是最后做出来都是 sphere？你现在会觉得 sphere 很有意思，很重要。可是对一个学生来说，它实在不够新鲜有趣，能让你看到的东西实在太少。当时我想看到很多更新奇的东西，可是数学系在教学的时候，并没有让学生接触到一些最新最有趣的数学，总是逼着学生去学习最基础的。数学系的学生证明了四年，就像少林寺的和尚在挑水一样。四年都在挑水，却没有让他看些其他的东西，很容易就读不下去了。由于当时对数学很怀疑，就请教系里老师，他们很多人并不同意我的想法。但也有些老师，像张海潮，他觉得我这样去想、这样去怀疑是有道理的。对于老是证明 sphere 这件事，他想办法用 Lie group，symmetric space 等等去解释，说明它的重要性。大三升大四时，在台大当时有个不喜欢上课的风气。所以我一概不上课，然后全部自己去读。结果是浪费很多时间。大四时，基本的电磁学稍微学了一点，不过也不是很积极，纯粹用数学眼光和想法去了解。一直到后来，才用比较物理的想法去读量子力学和电磁学。大学毕业时，当时心里想将来要做微分几何，用它去了解 gauge theory。后来到了普林斯顿，发现没有人在做 gauge theory，只好不了了之。

李：你觉得当初的课程以什么样子的形式呈现，对你才会比较有帮助呢？

而现在你是老师了，可不可能换个比较理想的方式去做呢？

姚：我觉得数学不需要那么严格，不需要每样都在大学里教。有一两门课，如高等微积分，如复变，可以教得严格一点。但是严格也是相对的。例如教证明时，若画个图能一目了然，看到直觉的观点，那么只画一个图就好了。这样就非常简单，学生也很快可以学会。若要求不可以这样做，学生就得花好几倍的时间，才能学会。如此是不是值得呢？依我的观点，宁可让学生很快学到最直觉的观点，看到定理的应用，而不是用最严格的方法去证明。如此学数学非常快。教微分几何如果能把具体的例子拿来计算给学生看，学生一定会有兴趣。不一定要告诉学生所有可能的细节，只要简单讲重点，找几个有意思的例子，做些计算，看它真正代表的是什么意思，就可以了。若要学生变成数学家，他可以慢慢把严格的东西一步一步地还原加上去。

李：你现在是这样实验带学生吗？

姚：学生被规格化了，似乎受不了这种方式的学习。我在纽约和中国台湾教书发现一个现象，如果在课堂上定理证明得不是那么严格，学生便很难接受。他们常常不知道我在课堂上是否已经把定理完全证完，也不确定我是否把一些深奥的地方藏起来。数学系已经把学生训练成以为任何一样事情都很困难，以为即使是简单的想法背后一定也藏了很多高深的东西。我觉得这不是很好，所以在教学时，我喜欢只讲重要步骤，告诉学生剩下的细节不清楚也没有关系，以后可以再慢慢补起来。

李：方才你说比较倾向将许多细节删掉，多靠些直觉。有时候，这样是不是容易因疏漏而导致错误？

姚：现在学数学要快。比方说实变中 measure 到底要教多少？这部分当年我也花了几乎半学期的时间去弄清楚所有的细节。可是做研究至今，所学的那些并不见得有帮助。所以事实上只要学些基本的就好了。为了要让学生能很快学到数学知识，同时使他们受的训练不会太狭窄，所以不能每个细节都注意。已经处理过没有问题的，或没有太多争议的细节可以先删掉。你问会不会因为依赖直觉而容易犯错误，当然可能会有。但是其实做研究时犯的错误，大多都是因为我用了一些抽象的定理，而且通常最后都会发现，这些错误都是少了一个关键的具体估计。因此如果用上抽象的定理，又没有相应合理的直觉，就很容易产生错误。我也看过很多数学的文章使用抽象的做法，结果常常会有错误。

李：所以你认为学习的过程，用比较快速的方式是行得通的。

姚：不只是可以的问题，而是必须要很快地学习。如果今天训练出来的学生还是像以前一样，在这个新的世界是不够的。

李：那么基本功，例如做习题，要如何训练？

姚：大学最重要是先训练分析或是代数的基础，这些做得扎实，其他的就可以快速地学习。以分析为例子，必须要求做高微、复变的习题，这是很重要的。若没有做很多习题，至少每个部分也可以找一两个稍微难的题目做。

普林斯顿求学及研究工作

陈：你已经提过国内求学的经过，可否请你也讲一下在普林斯顿求学的经过？

姚：出国那段期间因为数学已经学得很烦，所以想去学物理。去普林斯顿时，第一年全部上物理系的课，数学系的课都没有上。后来因为在数学系有 qualify examination，我想还是先把它考过吧，便花了一些时间准备。等考过之后，第一年也结束了。在普林斯顿，数学系的学生其实可以到物理系找指导老师。我去物理系找了一下，发现没人理我。当中有一两位比较客气一点的，像是有一位做天文的，他给了我一篇 paper 读，可是我看得很吃力。当时我的物理实在太差了，想朝物理发展基本上是不可能的事情，所以只好回数学系找指导老师。我换了很多指导老师，原因很多，不过总是这个不合或那个不顺的。本来想用 geometry 去做 gauge theory，但是当时没有那样的老师。后来又想学 quantum field theory，但是当时在普林斯顿除了一位年纪很大的老师外，几乎没有人做这个方向，我想了想就决定放弃了。一直到第二年快结束了，还是没有找到适合的老师。

陈：为什么特别想读 quantum field theory？是因为大学接触过吗？

姚：那时候大家把 quantum field theory 说成是非常伟大、高深的东西，整个物理都在谈论这种题材，所以我想读它。我在数学系找了 Fefferman，又找了 Martin Kruskal 谈过。有人跟我建议说，虽然 Kruskal 懂一些 soliton，但是也不理想。现在回想起来，Kruskal 其实是位伟大的数学家。因为已经换了太多老师，觉得烦透了，第二年快结束时，我想就快些找一位老师，赶快毕业算了。这样最后才选到 Lieb。

尤：为什么没有考虑像分析的领域，去找 Stein？Fefferman 不也是做分析的吗？

姚：Fefferman 当时在做一点物理，我想找一些跟物理比较有关系的题目。Stein 四平八稳，我当时的个性觉得他的领域不是那么有趣。他关心不同函数空间中的 operator 是否 bounded 的问题，这对我来说比较枯燥些，没有很大的吸引力。

尤：当时的 Milnor 呢？

姚：Milnor 不在普林斯顿吧。哈佛为了想学些数学物理，跟 quantum

field theory 有关的东西，我还跑去哈佛找 A. Jaffe 以及到罗格斯 (Rutgers) 找 Aizenman。我那时想跟 Jaffe 学，也曾想要转到哈佛去。基本上第二年我在普林斯顿是浪费时间，东试西试，没有找到一个满意的。最后项武忠骂我说，如果普林斯顿没有人可以教你，那么全世界就没有人可以教你了。我那时候太挑，意见也特别多。

在普林斯顿时，我是非常认真地念书的。但是我觉得书读到某个地步，再读就没有用了。读到某个地步之后，如果没有做研究，再怎么读也不会真正懂。那时大部分时间在读量子力学、量子场论。可是现在回过头来看，自己有时候用到跟量子场论有关系的东西，也都是后来做研究时，再慢慢 pick up 的。那时候念的书，似懂非懂。胡乱念过去，书是念得不少，但也不见得如自己预期那样真懂得那些东西。

陈：请稍微介绍一下你的研究领域。

姚：我想先从我和 Lieb 做的开始。Lieb 是我的指导老师，他叫我做 stability of matter。当时我也不能完全说服自己，认为这是有意思的问题。只是想拿个题目做做，然后毕业。

陈：所以你不觉得那是当时物理的中心问题之一?

姚：当时我不觉得那是中心问题。

尤：那时候是 1985 年吧? 倪维明回中国台湾谈到你们的工作。

姚：其实是这样子，当时 Fefferman 跟 Lieb 都在做 stability of matter，他们竞争很激烈。我当学生，也不去管这个问题重不重要。可是坦白讲，当时一直不懂去证明一个量子力学系统，它的 energy per particle 是 finite，到底有什么重要，也不觉得很有趣。当然，后来加了一些相对论的效应，再加了一些其他的东西如磁场，问题就变得比较活泼。虽然说问题更有趣了，只是心里还是觉得不是自己最想做的事情。

陈：你跟 Lieb 有很多工作吗?

姚：在研究所第三、四年及毕业后第一年，我跟 Lieb 做了好几篇文章。在这三年之间，尤其在普林斯顿大学最后一年，我差不多每天都在 Lieb 的办公室。后来我离开普林斯顿大学，在高等研究院当 postdoctor 一年，有一半时间我去跟 David Brydges 学 renormalization group。另一方面，我又跟 Lieb 继续做一些工作。当时 renormalization group 是 quantum field theory 最核心的想法，我去跟 Brydges 学，本来是很高兴的。只是后来我们写了一篇论文，让我写得很痛苦。它的论证过程实在是很烦很复杂。一个想法，写下来都将近七八十页，真的让我觉得很难过。之后我到纽约去，一开始跟 Aizenman，最后换成跟 Varadham 学 probability。之后我跟他做了很多工作。对于 probability，我一直是用比较统计力学的观念去思考它。不过我当

时是从零开始学 probability 的。在中国台湾的时候，几乎没有什么这方面的背景，像 central limit theorem 当时也根本不晓得，真的是从零开始。我去 Varadham 的办公室，那时张志中也在那里。于是我就向张志中学，然后再向 Varadham 问问题。这样也做了一阵子。因为我对物理比较有兴趣，所以在跟 Varadham 合作的时候，我思考的方向比较偏向物理现象的问题。差不多到了五六年前，我开始思考原来的方向已经做了很久，下一步到底应该做什么，想找一些新的方向。后来决定去做 quantum dynamics，理由是：第一它几乎没有人做，第二则是量子力学的重要性。我相信即使过了三十年或五十年，量子力学仍占有一席之地。在数学里，最重要的常常是多年的 conjectures。我觉得其实更应该问的是，我们研究的问题以后是不是还重要，到底是不是有恒久的价值。由于自己有时没有办法回答这问题，所以研究也常常做不下去。但是对于量子力学，我相信它的重要性，所以没有这个问题。在我的研究中，一方面我跟 Lieb 做 stability of matter，这是量子力学中的静态问题。另外我做 probability 是研究 evolution 的问题。量子力学加 evolution，合起来差不多就是 quantum dynamics。我选择这样的题材，因为我在量子力学方面有些背景，在跟 dynamics 有关的方程式方面也有些背景，而这个方向又没有人做，应当是很不错的。在这方面我投入很多时间，但进展缓慢，相当困难。可是我相信 quantum dynamics 的重要性是不容置疑的。

量子力学的发现，早期像 von Neumann 及 Weyl，他们做了不少。像 von Neumann 做的那些东西，都慢慢变成 functional analysis、C* algebra。数学界很多做 C* algebra 的人，对原来量子力学许多基本现象的兴趣越来越少。其实你真正把量子力学的 equation 写下来，有很多基本现象可以探讨。那么在数学上你该怎么提适当的问题呢？这方面却少有人好好去想。所以我觉得这是一个非常大的方向，值得花上二三十年好好研究。

陈：在物理上，比如量子力学中，解出重要的特例便满足了。你觉得这种方式够不够好？

姚：物理跟数学所关心的不太一样。物理一方面想找出新的 basic 方程式，另一方面想找出实验及应用所需的简易模型。这个简易的模型，不见得是原来的量子力学模型。它只要是一个比较有效率、可以计算、可以逼近的模型就好。因此，对量子力学很多 foundation 的问题，他们都比较少去碰触。比方说，我们对量子力学中 many bodies effect 的了解是很少的。把这东西做好，即使对物理本身，也是非常重要的。其实量子力学的方程式，所包含的内容非常丰富。如果和数学上其他方程式相比，像 elliptic、parabolic 及 hyperbolic 方程，甚至 Boltzmann 方程，都被研究了很长很长的一段时间，数学家对它们的兴趣至少都有百年以上。但是数学家对 Schrödinger 方程的兴趣，基本上是相当小的。就算有也限制在一些特定的 nonlinear Schrödinger 方程方面。

稍微问一点其他不同的问题，几乎就没有人碰过。如果其他的不谈，纵使从纯粹方程式的角度来看，Schrödinger 方程也是一个非常丰富的例子。

陈：那么想做数学物理的人，是否可以从 Schrödinger 方程的数学着手？

姚：我觉得 Schrödinger 方程是一个很好的题材。但是另一方面，我也一向不鼓励别人一定要去做某件事情，我觉得每一个人顺其自然比较好。譬如在大学的时候，挑几个比较基本或比较广的东西学学，不需要那么窄。当然也可以专注一两个方向。到时候不论出去念书还是留在台湾，你的指导教授也都有他们的方向，所以你那时碰到什么就是什么，你现在急也是没有用的啊。我在大学时，所有时间都花在微分几何，想用它做 gauge theory，可是我到普林斯顿发现没有人做 gauge theory，那我该怎么办呢？

李：你提到高中时，也有很多自修数学的同学。后来大家的发展不一样，是什么原因？

姚：读数学最后能走出来，除了努力之外，机会与运气也是很重要的。一位数学家的表现，除非他的才智和大家比起来有很大的差距，不然的话，常常也要看其他的条件能否配合。同样有聪明才智的人，往往因为运气、身体健康的程度及个性等的因素，最后的表现可能很不一样。其实我觉得个性对一个人的影响很大。

李：那你有怎样的机会与运气，还有怎样的个性，对你的研究是比较合适的？

姚：刚才提到在普林斯顿时，我找 Lieb 当指导老师。他做数学的 style 和我蛮像的，这是我的运气。跟一位非常好的老师是很重要的，第一他要肯教你，第二他要真正是最好的数学家。跟个大师与跟个一流的数学家中间的差别几乎是无限大的。像 Dyson，也是一位真正好的数学家，可惜他不收学生，没办法跟他学。当然若是绝顶天才，不论跟谁都没有问题，但是这种例子毕竟很少。后来去纽约跟 Aizenman，没有做出什么，另外找了 Varadham，才发现他的研究非常好。当时也想过找其他人，不过现在看起来他们其实没有做得那么好。有时很奇怪，有些好的研究者，学生反而并不是那么知道。Varadham 对我影响很大，这也是运气。当时如果跟其他的人做下去，我现在数学上可能没什么特别结果。我每天与 Varadham 讨论数学至少两个小时以上，长期下来，影响很大。那时我在 NYU 升上 assistant professor 是在十月、十一月之间，而与 Varadham 做的题目是到九月才做出来，这中间只差一两个月。如果再晚一点才做出来，我就离开 NYU 了。若真离开了，可能走的是完全另外一条路了，所以说运气是非常重要的。至于性格，人与人的相处，温和一点是比较好，不过做研究的，个性里还是要有些坚持才好。个性若不够强，研究很难做下去。然而个性太强了也会有问题，可能找到一个很难的题

目，因为不肯放弃，最后却被卡死在那里。我看过研究做得非常好的数学家，他们做研究时的性格都非常强。不论平时待人处世是什么个性，他们在做研究时，那很深沉和侵略性的一面都会浮现，不然研究都做不出来了。

李：你选择 Lieb 与 Varadham，真的纯粹是运气好吗？他们不也是经过你的挑选？

姚：我也不确定。可能不完全是运气好，自己也挑。

李：挑选过程中，什么因素影响你的选择和决定？

姚：在纽约找 Varadham 之前，曾去找另外一位老师，他常常很忙，无法和他谈数学。Varadham 有时间又肯与我谈数学，张志中又是他的学生，对我而言很方便，这是我的运气。Lieb 是我换了很多老师之后的选择。

李：刚才你提到有些很好的数学家，在学生中的知名度不见得很高，学生应该怎么去找出这些老师来？

姚：这没有办法。做研究和教书是两回事，学生很难区分。

李：你在选老师的过程中，换了不少人。听你刚刚讲的，似乎当你觉得不适合时，就不会一直待在同一个人那里。

姚：我不太喜欢念书，喜欢直接做题目。在普林斯顿时，很多老师要我念很多书，我并不太想念，所以就跑掉了。Lieb 比较直截了当，他给了一个题目要我去想想。我问他要读什么书，他说通通不用读，甚至也不要求我去看他的论文。不过我还是去图书馆找了一堆 paper，他看看说都不用读。他的题目在数学上没有已知的理论可以处理，所以不用读什么。我的论文是他给的题目，主要在证明一个一阶方程式无解。一阶方程式通常比较难处理，当时我把它先变成二阶的方程想证明无解。但是证了半天都证不出来，最后才朝反方向想，居然找出了解，而且是可写下的 exact solution。

李：在什么情况之下，你开始换个方向，想去找出它的解呢？

姚：他叫我证明无解时，我问他为什么相信是无解，他也说不出所以然。他只说有解的话，物理现象会变得比较复杂，无解的话比较简单。那个方程式从来也没有人看过。我拿了很多 paper 给他看，他说这个不相干，那个没有用，所以只有自己去想。最后找出一些式子，才把问题做出来。他给的题目很活泼，不需要先学很多理论。我非常喜欢这样的方式。

李：在他这样方式的教导之下，其他学生的情况呢？

姚：他给学生的第一个题目通常是一个很难的题目，通常是他想了五年、十年想不出来的。若是做出来了，他会非常高兴；若是学生做不出来，他会换一个简单点的题目。Lieb 带了很多很好的学生。

李：你是否比较喜欢分析？

姚：不是，我也喜欢代数，大学时有一段时间我喜欢分析，一段时间喜欢代数。读博士时，倾向分析，代数没有机会读下去了。

李：你对代数、数论也有兴趣，到普林斯顿时也尝试转系，是什么时候确定分析的方向，怎样做决定的？

姚：刚开始想转物理系，过了一年多也没有转成。想转物理系，是觉得当时看到数学系考虑的问题，不是那么有趣。我比较喜欢处理一些可以看得到的东西，物理世界的问题很自然，生活周遭产生的事情它都有，让我觉得有趣。对古人所提的一些问题及 conjecture，并不特别感兴趣。当初想学物理，是想用微分几何去研究 gauge theory。现在看起来，这种想法其实也是从数学系的角度出发的。

李：那又怎样走到现有的方向？

姚：走到现有的方向，其实也不是我的选择。我跟着 Lieb 时，他做 many-body problem，我也就跟着做 many-body problem。这方面在数学里几乎没有人做。我跟 Varadham 时，他做的是 interacted particle system。那其实也是 many-body problem，只是它加了 stochasticity。Varadham 做的是有时间，Lieb 做的是没有时间。Varadham 做的是 stochastic，Lieb 做的是量子力学。跟他们做，两方面我都有背景。好几年前我想走新的方向，当时最想做的是 quantum dynamics。一方面是因为量子力学是 20 世纪最重要的理论，另一方面它和我的两背景都有关，里面又有很多题目没有人探讨。因此它是值得做的方向。

李：这方面几乎没有人做，你会不会因而感到很孤单？

姚：不会，感觉很好。这是一个新的方向，基本上也是自己要找的方向，很有挑战性。另外数学家对量子力学忽视了一个世纪，是不可思议的事情。所以，很少人做我也无所谓。这一百年来除了生物以外，最重要的两个科学就是相对论与量子力学。量子力学不管在工业上还是科学上都是最基本的东西，数学家放了一百年没有去处理，是很不可理解的事情。我想问题是 quantum dynamics 非常困难。

李：你习惯自己一个人研究呢？还是也喜欢与他人合作？

姚：我现在喜欢找年轻人一起做，比方说，目前我和蔡岱朋就合作得很好。做这个方向的另外一个好处是，当我演讲谈到量子力学时，可以看出数学家他们其实非常羡慕这些东西。羡慕我可以去找一个他们完全不熟悉，一个基于自然界非常重要的方程所产生的问题，然后给它一个有意义的数学陈述。情形就是这样，我只好有些寂寞了。

李：要懂很多，才能做这方面的问题？

姚：其实做研究，不需要懂全部的东西，就可以开始。而且很多题材，可

以叙述成孤立的问题，不见得会牵连到太多东西。比较重要的是，将一个物理的问题用数学去处理，你一定要处理到即使是学物理的人也觉得有意思。我觉得提出一个新问题，要让数学家相信它有意思，要比让物理学家相信容易多了。研究新问题，从旧有的数学角度来说，最重要是能发展一些新的数学、一些新的工具出来。

对数学和科学的看法

陈：目前整个数学的发展有什么重心？一般来说，数学家比较不跟别人接触，他们在今日扮演了什么角色？你觉得数学在整个社会是走向没落，还是受到更多的需要？

姚：你问我现在数学的位置，我觉得其实蛮难说的。我们可以从一个比较的角度来看，你想想一百年前、两百年前，当科学家在做各种科学研究的时候，都想找个数学家来帮他们做一些计算。那个时候除了数学家以外，你要他算点什么基本的东西，他都不会。我们现在看起来一些很基本的东西，如一些简单的复变、微分方程，除了数学家以外，整个科学界大部分都不会。所以那时候的数学家在整个科学界绝对是占中心的地位。现在情形不一样了，现在每个行业、每门科学，如果有东西不会的话，譬如他们方程不会，数学不会，就买个计算机去跑一跑，看见个图就好了。他们不管相关的理论，也不管计算机算出图形的对错，反正差不多就可以了。在这意思下，数学在这整个科学上扮演的角色，其实比较微弱，代替它的是做这些计算的，让大家看到想看到的东西。所以至少对我来说，数学家必须要了解到数学今天已没有一百年前、两百年前，在整个科学界那样子的中心地位。那数学新的生命在哪里呢？任何一个学科在一个方向上遇到困难出了问题，总会想办法在另一个方向上发展，表现出新的意义。比方说写软件的人，他们希望多学一点数学。他们觉得受用的是，在学习数学过程中具有的一些训练，而不是真正要 ε 和 δ 这种严格的数学。从这类的例子来看，数学可以训练出一批人，在这个社会上还有另外重要的功能。至于数学在纯粹科学上的直接应用，比方说编码学及影像辨识，还有像做概率的人，训练出一大堆人做金融数学，都是极佳的例子。不过很多数学上比较抽象的题材，它们对其他科学扮演的角色，就不是那么明显。比如说你问：现在数学做的东西会是将来物理的 foundation 吗？这我就不晓得。可以确定的是，当年数学家所扮演的那么重要绝对的角色，现在变得比较不一样了。今天，你可以和生物学家一起工作。可是跟生物学家合作，数学家是不是能扮演着最中心的角色，这并不是那么清楚。以前数学家的角色很清楚，他在最中心的位置。今天的数学却往各个方向发展，每一个方向都有它的意思，但不见得是在中心位置。因此，我没有办法清楚

说出现在数学的位置是什么。

陈：在早些时候，物理学中有些大的中心题材，像高能物理、粒子物理以及像宇宙论等。近年来像材料科学方面的问题更受到重视，物理好像失去比较大的中心议题。数学也有类似情形吗？

姚：我想数学现在变得比较多样化，不再像以前那样。在应用方面也同样变得更多彩多姿。还有，各种现象的计算等等，其实大部分还是需要数学家参与。

李：怎样区隔物理与数学？

姚：大致来说，数学家是不碰实验，不懂实验的结果如何解释，只讨论基础理论的结构问题。物理学家则必须对实验结果有些感觉，即使不做实验，也能了解其中的主要含义。但是现在数学对很多科学的现象不关心，越来越狭窄，这对数学的发展是很不好的。

李：你是不是觉得有些时候数学的进展太慢了？你定义的数学是只要不碰实验的就是数学，那你有没有考虑过做数学以外的事情？

姚：我没有做实验的天分，数学还是我比较习惯的方向。数学家应该要想一件事情，就是今天我们做的数学到底跟世界有什么关联，如果失去关联性的话，那数学就死了。不可避免的，数学每经过一段时间之后，一定要回来看看它跟人类文化有什么相关。我不相信数学是可以离开人类文化而完全独立发展。就像我刚说的，一两百年前任何人要做科学，不管是物理还是化学等等都需要数学，都会找数学家。那时的数学家，即使只会做些基本的计算，就很伟大了。今天的情况已经不是这样，我们在处理问题时，若只说这方程式有一组解，这对于其他科学的人是没有意义的。你一定要能在某种程度上刻画这个解的性质，而且这个性质是他们所感兴趣的。这样的标准非常严格，现在的数学常做不到。做不到的部分原因，或许是因为很多自然界产生的数学问题，超过人类能解决的范围。不论是否如此，至少最近这段时间，一直没有什么数学的发展，让别的行业看出数学家真正在解决问题。当然也有些例外，如 integrable system，真的找出一些具体的解，对别的行业是有意思的。不过，这只是极少部分的数学。数学和其他学科的关系已经越走越弱，在数学、物理、化学、生物等等的光谱中，数学家是在最右边，或最左边，与以前数学是科学的中心不一样。数学家必须了解到这件事情，并且让我们做的数学伸出触角，与科学有某种程度的关联。数学有的部分是非常纯粹的，可以跟其他科学不相干，但一定也要有一部分跟别的科学有关。当然，这些只是我个人的意见。

李：在整个数学里面，有些是做纯数学的，另有一些是触角必须伸出去，与其他的领域搭上线。但是谁去做伸出触角的部分呢？可能每个人都会说我

是做纯数学的。

姚：大部分数学家其实很没有自信。与其他科学的人在一起常常没有信心。

李：会不会是在学习的过程中花了很大很大的力气，已经没有多余的力气去接触其他的东西了？

姚：你可以问一个数学家必须要面对的问题。在做 string theory 的人，大部分都是物理学家，数学几乎是从零开始。他们要学 theta function，Riemann surface，复杂的代数几何等等，各式各样的技巧。数学家必须要想一想他们为什么在那么快，那么短的时间内就可以应用这些知识？他们当中一批真正好的人，能抓住数学知识的精髓，并不是乱用。数学家在建立一个架构时，要求能放诸四海皆准，所以每一步都要非常严格。但是物理学家在学这些东西时，只拿一两个物理的例子，然后用这一两个例子，去了解每个定理的内容。所以他很快就可以抓住主要的内涵，并开始应用。如果我们教数学没有办法教得快，学生一定要从绝对逻辑去建构一些东西，那是非常可怕的。如果每一步计算，每一步过程，唯一的想法是 check 它是否合乎逻辑，背后没有一个 picture，我相信那样是没有办法学懂的。很不幸的是，我们现在训练学生，就是在训练一个没有 picture 的世界。现在不只中国台湾数学的士气很差，美国也是如此。但是台湾可能更明显。

李：士气差与分工分得太细有关系，很辛苦做出来的东西，却没有人感兴趣。

姚：选择数学这一行，有时我也会想这样的事情：做数学到底和人类关心的各种问题有多相干？依我看，微分方程对科学的影响是比较多的。问题是微分方程别人不会解的，我们也不会解。我指的不是解的存在性，而是刻画解的结构。概率在科学的应用也很多。另外 theoretical computer science 影响也很大。其他的如拓扑、几何对 string theory 有贡献，不过它们在科学上的影响还是比较局部的。

数学奖

陈：可否谈谈得麦克阿瑟奖 (MacArthur Fellow) 的前后情形？

尤：我看到了报纸对你得奖的报道。

姚：某一天有人打电话给我，说我得奖了。之前我不知道会得奖，之后他们也没有管我，只是每个月寄一张支票给我。就是这样子，也没有太多可讲的。

陈：事前难道没有一点风声？

姚：没有。我完全不知道。

尤：你心情的感受呢？

姚：得奖是很高兴，可是过了没多久，就觉得没有什么了。你现在很难想象。

陈：但是历年得奖的像是 Gelfand，Mumford，Schoen，Uhlenbeck，丘成桐，Wiles 等都是伟大的数学家。

姚：是没错，当时是非常高兴。但得奖这种事是没完没了的，过了两个月就麻痹了。自己在研究上做出很好的东西，对自己的工作很满意，这种还是比得奖长久。例如诺贝尔奖，我们都没有得到，你会想如果得到一定万事 OK。但是得到后过一阵子，你还是需要有别的东西来满足。你并不能每天把得过的奖牌贴在墙上，然后就这样自我陶醉。它是一种肯定，当时你很高兴，对你心情有影响，可是之后让你每天高兴的是你自己的研究。

尤：可是这代表别人对你研究的肯定和推崇……

姚：每个人对自己的研究都有个评估，看自己值得什么样的评价。可是总是把自己估得高了一点，所以得到的肯定，总是比自己想的差了一点。反过来想，我们现在得到的肯定，说不定都已经超过我们应该值得的。有时我们读一些数学的文章，看到很好的研究工作，也会觉得奇怪，像这样的文章，这样的人，也没有得奖啊！有些人做了很多很好的工作，可是什么奖也没有得到。例如以前伯克利的 Morrey，他根本不是做我们这个方向的，但也在我们这个领域做了非常有意思的工作。

陈：你是说做椭圆方程和变分的 Morrey？他做了这方面的工作吗？

姚：你看，连你们都不知道。从某观点来说，他可能也是第一位对统计力学有兴趣的数学家。现在有关 equilibrium state 的重要结果，Morrey 其实也看到一些东西并做过这方面早期的工作，非常非常有意思。好的人未必受他人肯定。然而反过来，有些很出名的人，去看他的研究工作，却发现并不怎么样。这也是没有办法的事，人类的社会结构如此，大众对你的认可及评价未必正比于你的研究工作。如果觉得自己值得八十，能得个六十，也就应该很高兴了。还有人值得有一百，却只得了四十，那怎么办呢？因此，只要自己懂得愉快就好了。

尤：怎样才是让自己愉快的好办法呢？

姚：做研究是一种生活方式，也是生活的一部分。当然，所面对的是专门领域的东西，未必得到其他人对等的评价。然而反过来看，我们有职业，有不错的薪水，期望未来更美好，能做更多，如此就可以了。

陈：可不可以谈谈你得的庞加莱奖？也有奖金吗？

姚：那是数学物理奖，三年颁一次。上次在伦敦，跟我获得麦克阿瑟奖是

同一年（2000 年）。每次发给三个人，一个年轻一点及两个 senior。第一个年轻得主是 Kosevich，这一次是我。它几乎没有什么奖金，只有一张奖状。

尤：你觉得这代表对你工作领域的肯定吗？

姚：庞加莱奖本来就是数学物理方面的，所以比较没有这样的效果。不过，也可以说是对我做的 analytic approach 的一种肯定。我想因为麦克阿瑟奖涵盖各个领域，它比较让你觉得自己的领域及工作受到肯定。

陈：可否谈一下你和其他重要奖擦身而过的情形？

姚：这世界上擦身而过的，就是过了，也没有什么好讲的。任何的奖，够资格得这个奖的一定比得奖的还要多。例如一个奖有五个人得到，够资格得这个奖的可能有二十个、三十个。因此不能听到某人得了奖，就问：那人跟我差不多，他有，那我为什么没有得奖，我也够资格啊！这是说不过去的。够资格得奖的人绝对是远超过真正得奖的人，评审的委员总要做个选择。除非自己的研究工作远超过别人，有个清楚的差距，否则没有得奖，也没有什么好讲的。所以整个来说，没得奖只是表示自己的工作没有做得那么好。

陈：从中国台湾的角度来说，这是非常可惜的。错过了这次，下次不知何时才能得奖。

姚：你不要这样子想，年轻人总是有希望。每一代总是比前一代的要好，不要觉得年轻的家伙现在看起来不怎么样，将来真正做得好的就是他们这些人。

陈：台湾人留在美国立足的好像一代比一代少？华人又是怎么样的情形呢？

姚：台湾地方小，人口少，想留在美国发展也相对少。华人在美国并没有一代比一代差，我在中国台湾看到的年轻人也比以前好多了。

陈：所以你觉得中国台湾看起来仍相当有希望拿个奖？

姚：这要看你希望的是什么。例如敬业的精神比以前好很多。把 research 当作是自己的职业和应该做的事情，每天教完书之后就想数学，这个观念渐渐被越来越多的人接受，就是很大的进步。而且，这也是比什么都更深入更重要的。另外，现在年轻的一辈，每个人都很活泼，如果慢慢有了自己的方向，十年之后，就会有一番成就。数学有个现象，通常要做到五十岁，或除非你在一个很大的领域中，有人支持你，不然你做的东西好像就不怎么重要。但是等到出了名之后，即使所做的东西不怎样，也变得很重要了。这样的现象会让人以为以前的人做得比较好。其实真正的原因是做出那些东西的人大多五六十多岁了，他们的研究题材本来就受到更多的认可。

陈：数学二三十年来基本的课程都没太大的变化，但是目前数学也越来越多元化了，你认为课程上需要做改变吗？

姚：应该这样讲，基础的课程还是基础的课程，但是也不能说有那么多的东西全都是基本要学的。所以必修课稍微少一点，学生自然会到处去学，这样就没有问题了。例如，要做纯数学的，可以多选些相关课程。以前我念书时几乎没有什么课可选，都是必修课，这样不是太理想。另外有件事情让我不能理解的是，一个数学的观念常被描述成很伟大的东西，一定要花很多时间去了解才能学会。这是完全不对的。我们应告诉学生，数学的东西并没有什么伟大，数学很多是简单的。去学它，中间有一些细节不会也没有关系。基本的观念学会就可以用，用了也不要怕错。但是现在数学系训练的方法却倒过来，以为任何东西一定都很伟大，背后藏了很多了不得的细节，没有完全学懂之前就使用一定是错的。因而把学生训练成一点胆子都没有，这是很严重的问题。

尤：这是到处都这样，还是只有中国台湾?

姚：我看到的几乎到处都是这样。就像刚讲的，以前我念书时花好几个月读拓扑，光是学 manifold、vector field、pull back 这些名词就学了好久，这是不对的。数学应该是思考的、活的，应该想办法让学生很快进入状况，进入中心，一些细节可以先拿掉，以后有需要再慢慢补上。不能什么东西都像蹲马步、挑水一样学习。如果数学系四年中，高微就只学会 compactness，不会做计算，这样是不行的。

陈：你会不会觉得美国的教育方法比较好？大学没有学那么多，但研究所很快进入状况。

姚：美国研究所教书通常进度是快得多，欧洲也是这样。不过重要的还是像刚讲的，如何使学生不要怕数学。像积分跟微分，积分跟 limit 可不可以交换，学生被要求每一步都要检查，等确定所有假设都满足才能做下去。可是在实际做研究时并非如此，都是先假设可以交换，答案出来后再回去慢慢看细节。在大学训练中如果每步都必须循规蹈矩，如此一来很多东西就没有办法学。所以大学学了高等微积分，可是像 Fourier analysis，以及用 Fourier analysis 解 ODE 和 PDE，或像概率，都几乎没有学到。很多可以用的东西都没有，学生会的都是没有用的。

尤：Apostol 那本书是典型的例子吧!

姚：怎么可能高等微积分要写到五百页呢!

陈：教科书的取材和不同观点的强调，是否也受当时潮流影响，也会风水轮流转?

姚：其实也不是。一些比较旧的微积分像 Courant and John，他们写的也都非常强调可以用，可以计算。一些不可以计算、基础的东西，像是专用词汇等应该让它很快地过去。

陈：你觉得在美国的台湾人才最好能回来，还是我们该把多点人才储存在美国？

姚：对台湾而言最好当然是大部分人才都可以回来。但是也要有些人在外面，作为学术交流的网络。当台湾有人做出好的结果，也可以让外面的人更容易知道。不过现在还不用担心这个问题。

陈：因为台湾人才还是太少？

姚：是的。同时每个人有各自考虑的因素，也不能强迫他一定要回来。

陈：在国外环境较好，回来可能研究进展变慢。

姚：当然会有这种问题。回来的话基本上要带一批学生，再慢慢发展。对台湾而言，多些人回来是好的。

对做研究进一步的看法

尤：当你做研究的时候，卡到了，该怎么办呢？你是硬着头皮做下去呢？还是会退缩？或者是暂缓停顿一下？还有你对问题有怎么样的品味？

姚：通常你真正有兴趣、梦想要达到的问题，都是做不出来的。你必须将原来的问题稍微修改，提出比较合理、比较可以做的 version。即使是这样，常常还是做不出来。一阵子后你可以先把问题放下来，过了几个月，甚至半年、一年再回来。有时候要这样试了好几回，才会慢慢发现，还有一个更简单的 version，都还没有解决，应该从这边开始。所以研究都需要经过一段长时间的累积，它的进展不是那么直截了当的。不过我想不只是我，每个人做研究都是这样。在获得 Ph.D. 后，可能作 postdoctor 一阵子，然后是 assistant professor 等等，可能跟以前论文指导老师还有很多合作关系。不过毕业七八年或十年后，应该去找出自己的方向。你可以在原来的题材上去发扬光大，甚至超越指导老师，或者也可以去找另一个方向，走出自己的风格。这因人的个性而异。重要的是，毕业一段时间后，要想办法更上一层楼，超越以前的。当然，我认为最好能在新的方向努力，花长一点时间，做出自己的风格。开始的时候会比较辛苦，因为外人可能会觉得你的研究不是那么有意思、那么重要，但长远来看，很可能会有一番更了不起的成就。

陈：那你怎么寻找重要的新方向？

姚：我也一直有这个问题。对自己做的东西常常觉得不满意，认为应该有更有意思的题目，因此也一直在寻找。我不是很确知自己怎么找到新方向。不过通常我们进入一个新领域，都会有些不同想法。过一阵子后，那些想法可以解决的问题都做完了。这时你可以继续待在原来的地方，改进原来的方法，看看还有什么可做。我不喜欢这样，我喜欢重新开始，另外找一个让自己

比较高兴的方向。虽然比较辛苦，却比较好玩和有趣。这样子做也有不利的地方。在数学界或科学界，每人都有标签，说这个人做了什么，那个人做了什么。你在某个领域里待久了，就会认识这个领域的所有人，你就是这领域家庭的一分子，人人会支持你。如果你的研究太常更换，就不容易有自己的标签。因此，在一个方向上，至少也要做上五年、十年，等做出些样子，有些成就后再更换。这跟我刚才讲的年轻人要做出自己的方向，又有些不同。年轻人跟着指导老师做的方向，基本上不是属于他的。除非他可沿着同样方向看到更多更深及非常不一样的东西，才值得继续做下去。否则，应当慢慢找出自己的方向。我们可以看看几个数学家的例子。譬如说 Sinai，他是跟随他的老师 Kolmogorov 做 dynamical system，但是他另外也找出新的方向做出很好的东西，所以他是非常好的数学家。又譬如 Moser，他当时做 Szegö 的 postdoctor，可是他能够做到更上一层楼。若不是这样，他就不会是这么伟大的数学家。当然从大的眼光来看，换个研究方向，在数学上只是个小小的变动。但若个人研究要进一步突破的话，一直跟着指导老师太久，其实并不好，自己要找些不一样东西来做才是。

陈：对于找新方向，多跟人谈谈，多听些不同领域的演讲有帮助吗？

姚：要多听一些 seminar。其实找方向和对科学的眼光有关系。有了好的眼光，才可以看出什么是比较重要的方向，并且帮助你去选择自己真正有兴趣的东西。我想重要的东西有两项，一个是眼光，一个是兴趣。这点中国台湾数学界的训练很差，美国也有同样的问题。学数学几乎不懂科学，如物理、化学等等都不懂，看到的东西常常太狭窄，这对将来的眼光大有影响。这样一来，你永远只看到老祖宗一百年前的数学，并不知道新的走向。数学应放在科学的大领域里，才能看出它的位置。当然也有一些例外，像数论，它比较自成体系。但是除非只对数论感兴趣，否则整个数学还是与其他科学密切相关。

尤：可不可以谈谈纯数学与应用数学的潮流。

姚：我比较不去注意潮流是什么。在热门的领域中，可以看到已经有很多好的结果，大家也都拼命去追逐。然而这些热门的题材通常是别人做了许久的成果，现在跟着加入已经来不及了，未必能做出好的研究。倒是一些不热门的题材，虽然刚开始时，没什么特别的结果，也不是一个那么大的方向。但是若你能看出它将来的重要性，经过五年或十年的努力累积，也许可以得到很有意思的结果。到时候它的重要性，将受到别人的重视。万一到时候它仍然不怎么重要，那也是没办法的事情。人生本是如此。

尤：所以去选择一个好的领域，才是最重要的事情。

姚：对，但通常最有意思的领域并不是现在最热门的。现在最热门的，往往十年前大家并不是那么重视它。数学里也有两三个方向二三十年来一直都

是主流的，如果你走的是这方向，可以继续。除了这样以外，可以找现在不是很重要的方向，慢慢去做，培养技巧。等到这个方向变得重要了，在技巧方面已经没有人可以跟你比，你就是这方面的佼佼者了。

陈：比如说 DNA 测序计划，前一阵子这么热门。现在投进去，已经来不及了，可是又不知道下一波的重心在哪里。

姚：对于 bio-informatics 我没有什么意见。不过数学家有时要问在做这个计划时，数学扮演的角色是什么。如果只是纯粹对生物学的服务，当然也是可以。但要了解到这只是服务，并不是这整个计划的中心。

陈：你觉得能成为杰出数学家最重要的是什么?

姚：这点我没资格谈，可以说一些我的看法。一个人的成就努力是很重要，个性也有影响，天分也不容忽视的。仔细看每个数学家做数学的风格，除了跟所做的方向有关外，也跟个性有很大的关系。

陈：你会不会觉得数学界的人，个性都比较特别一些?

姚：个性通常会影响到一个人的眼光。而影响一个人数学的是他的眼光，看他看到的东西有多深。假设有个数学家问了一个很有意思很重要的问题，他的技巧不是那么好，做到一半卡住做不下去了。此时他做了某些假设，让他的论证能过去。然后，由于他认为他的问题很重要，继续朝着这个方向想下去。三十年后我们再回来看，他很可能已做出一些非常重要的东西。另外有一个人，他的技术非常好，任何困难问题，能很快解出，但未必能看出新的有意思的问题。三十年后来比较这两个人，即使后者技术非常好，很聪明能解决任何问题，我们也很难确定哪一个人的影响会更深。所以有时眼光真的是非常重要。当然这种区分也不应讲太多，讲多了会比较空洞，失去对做数学扎实的感觉。当然，能两者兼具最好，但这是勉强不来的。

尤：所以成为好数学家除了运气外，眼光真的很重要。

姚：有好的眼光，把数学放在科学里，看它的位置，再决定要做什么。可是讲起来容易，却很难做到。就算你看到或想到该往那里走，也不见得有能力可以达成。

陈：你提过很喜欢滑雪，而且也滑得不错，这对研究生活的平衡是否有很大帮助?

姚：有啊！做数学研究是很辛苦的事情，每天面对方程、不等式等等。真实的世界与数学没有很大关联，你不能只是关在数学世界里想许多的问题，万一解不出来怎么办？所以生活上要有些调剂，找些嗜好，多学些其他的东西。人生是多方面的，数学只是小小一部分。百分之九十的时间花在数学上，百分之十的时间去看看各式各样的行业。你会发现每个行业做得非常好的东西，都是很有趣的。或者多去运动，可使身体健康，心情保持愉快。

陈：对于做数学的人以打桥牌、下围棋作为娱乐，你个人的看法怎么样?

姚：我念 Ph. D. 时也曾下过棋，一段时间后，便放弃所有用脑的娱乐。因为做完数学后，头脑都快炸掉了，不可能再用脑力去打桥牌、下围棋。所以尽可能挑一些使用体能不用脑的事情，就算用脑，也挑些像看看书、看看画，这些比较轻松的事情。

编者按：本文原载于《数学传播》2003 年第 27 卷第 3 期。

女数学家的精彩

——专访乌伦贝克教授

凯伦·乌伦贝克 (Karen Uhlenbeck)，1964 年密歇根大学学士，1968 年布兰戴斯大学博士。乌伦贝克教授在大域分析、规范理论和可积系统有突破性、开创性的贡献，得过多项荣誉，包括美国国家科学奖，美国国家科学院院士。现任教德克萨斯（奥斯汀）大学。

访谈：李莹英、刘太平、黄蓝萱

整理：黄蓝萱

李莹英（以下简称“李”)：1994 年时，你在普林斯顿高等研究院开始一个给女性数学家的指导计划，请你谈一下当初的动机、环境和目前的情况。

乌伦贝克（以下简称“乌”)：当我还是学生时，男女平等并不是一个议题。没有人对这样的问题感兴趣，不久之后 AWM (Association for Women in Mathematics) 成立之后，才开始讨论许多关于女性的议题。那时有不少计划，一些政策上的决定对数学不利，不过如果你想成为数学家，只需要专注于数学。

在我的年代和楚莲的年代，每个人都相信情况正在好转中，所以我们并没有采取任何行动。

直到我找到第一份工作，才发现女性数学家受到的歧视，但是我们仍然相信情况会好转，那时已经可以听到有人谈论要去除法制条文上对于女数学家及其他少数团体的设限。

可是到了 20 世纪 80 年代、90 年代初期，情况并不像我们当初想象的好转起来，当时女性们确实处在不利的环境，楚莲和我以及其他人如 Gin Taylor 认识到我们必须采取行动，于是我们便开始参与这个计划。

1991 年，在 Park City Mathematics Institute，我和一群数学家在美国国家科学基金会 (National Science Foundation) 的资助下开始着手这个普林斯顿高等研究院的计划。

我认为这个计划不只对女数学家有益，而且对数学界也有好的影响。然而，几年之后我们注意到仍然没有很多女数学家参与，我们开始积极鼓励女性申请。

这个计划以前是 10 天，现在为期两个星期。我们提供给大学部学生或开始做研究的女数学家许多不同的机会。我认为这是一个很好的计划。

李：你认为现在情况好转了吗？

乌：是的，现在情况改变了，但是我仍然看见那些女数学家使劲地奋斗，为了能融入数学系而在细微的地方奋斗。我不认为现在还存有任何的歧视，但是困难仍然存在。要兼顾家庭和专业的领域，原本就很困难，这对于男性或是女性都是难事，但是对于女性尤其艰难，女性古典音乐家也同样辛苦，数学生涯并不是一个特例。

孩子的养育很重要，费用很高。当我年轻时，教育孩子没有如此昂贵，因为在那时我们算是比较高薪的阶级，如果夫妇俩都是助理教授，两人的薪水雇用保姆和负担医疗保险，绰绰有余，但现在美国的环境，学术界的女性必须为金钱烦恼。

李：Park City 这个女性数学家的计划，每年都有一些特别的主题，除了数学领域，有时也横跨了其他科学领域，有各种不同背景的学者、演讲者及学生参与这个计划。

乌：一开始这是和几何相关的计划，之后转移到其他的计划，每年有不同的主题，我们试着选择跟普林斯顿数学系和高等研究院的研究相关的方向，在那些主题下，我们可以邀请杰出的女数学家。

还有，我对念应用数学的学生比较偏心，这是因为应用数学领域很显然能提供更多的机会。很简单地说，在应用领域中的数学家有更多的工作机会。我和许多人认为，女数学家通常有更好的社交能力，女性通常较具有沟通能力而且善于和他人互动，这些能力使得女性在应用数学方面有较好的表现，比较能够和科学中非数学领域的人讨论。这是女性在应用数学方面的优点。

刘太平（以下简称“刘”）：就科学研究来说，应用数学也有更多的机会。

乌：很奇怪的，我发现应用数学的学术圈并不像纯数学那么拥挤。我开始学几何的时候，只有我们几个人，我当时非常兴奋。但是我发现现在太拥挤了，有太多人研究几何相关的问题。

刘：你说当年学术圈并不拥挤，那时你是否感觉孤单，而现在你应该感觉更加兴奋？

乌：我不知道，现在的环境并不是那么让人兴奋，我过去能知道所有的女数学家，现在有太多我不知道的人了。

刘：你是让几何变成如此令人兴奋的领域的主要数学家之一。

乌：谢谢。我回头看我的研究生涯，当我开始研究不同的问题时，那是很令人兴奋。我开始研究 Lorentz 流形上的测地线，然后是关于偏微分方程平滑性的估计 (hard estimate for regulaxity of PDE)，之后研究最小曲面问题和规范理论 (gauge theory)。我曾经试着研究保角场论 (conformal field theory) 中的数学理论，那是数学物理中的一大难题。然后我做过可积系统 (integrable system)，现在我试着研究非线性波系统 (nonlinear wave systems)。这个领域更加的困难。但总体来说，这是十分令人兴奋的。

李：是什么使你改变研究方向？

乌：我试着到处看看哪些问题有意思，我只做那些我感兴趣的问题。在我刚开始学术生涯时，我并没有和其他女数学家合作，现在我有一些合作者，我和 Andrea Nahmod 合作非线性波的问题，和楚莲合作可积系统。

刘：也许“兴趣”是个关键字。不同的人对不同的事感兴趣，什么事让你感兴趣呢？

乌：我猜应该是那些数学中不同概念之间内在的关联，我是指数学里不同领域之间的关联。

最小曲面的问题，我们可以从拓扑、从代数，或是我花最多时间研究的硬分析 (hard analysis) 的观点来处理。

规范场理论尤其是这样，其中含有代数拓扑、硬分析、高深的拓扑，我觉得这领域非常有趣。我其实一直想了解可积系统。

我花了两年的时间才真正了解了代数和分析在这个问题上的关系，我现在好像了解了这个问题，但是我不确定在代数方面，我能有多少进展。关于非线性波的问题，我感觉处理这问题正确的工具还没有发展出来。

我希望大家能够有好的主意来更深入了解这个问题。举例来说，了解非线性波是了解歧异性 (singularities) 很好的模型。我们还没有正确的方式可以用来描述或是想象这些歧异性是什么，我觉得这是个非常宽阔、有潜力的领域，但我已经 63 岁了，我不知道我能否有够多的想法。

刘：你正谈到歧异性这个核心的议题。这是个非常重要的领域，你研究过肥皂泡的现象 (bubble phenomenon)。

乌：事实上，我记得当时我在思考这个问题时，我和那些正在研究最小曲面问题的数学家交谈，解决了最小曲面后，尝试研究黎曼映像问题 (Riemann mapping problem)，这些都有不同的尺度的现象，在非线性波的问题中也出现，还没有完全解决。

非线性波在不同的尺度之间如何交互作用，非常复杂，我们目前还没有数学工具，即使是数值分析也是相当困难。当我研究这个问题的时候想得很天真，我想“当我学了一些计算机分析和具备了几何的观点，再用上偏微分方程的硬分析，应该可以做出一些东西。”

但是我很快就发现计算机分析所需要的想法甚至比纯数学更多，如果你只是把一些东西输入计算机，它不一定会给你想要的结果。这对我而言是个革命，在那之前我对于数值分析领域的人有错误的看法，事实上，他们必须有想法才行。

刘：我以前的一个同事 Babuska 说过：“即使你有 90% 的计算结果都是正确的，问题是：如何弄清楚哪 90% 是正确的。”在中国台湾，数学系的大学生和研究生还不能充分地欣赏计算这个领域。

乌：如果你学计算，特别是模型建构，其中一个工作是如何选择问题而能真的写下方程式，然后再做计算。如果你这样做，其实就算是跨领域的。

事实上数学系丧失了大部分这样的人才，生物系非常需要那些研究生物问题的数学家，于是很多这样的数学家便离开了数学系，以纯数学的立场来看，他们是离开了数学系。我认为数学系应用人才的流失是很严重的问题。因为在生物和计算领域中，机会和财力都是如此庞大。

刘：很多数学系试着保持纯数学的传统。

乌：事实上那会引起更多的问题。过去数学系试着保持纯数学的研究，但是我不知道现在哪一个数学系还是持续着维持纯数学研究的传统，也许中国台湾比美国严重。我们事实上知道数学必须和应用保持接触，在某些意义上对学生而言是个很好的机会。

黄蓝萱（以下简称“黄”）：每个星期在斯坦福我们科学领域的女性们有固定的聚会，一位女性生物学家之前也曾在斯坦福数学系念过研究所，她提到她很多念数学的朋友，在拿到数学博士后，走向不同的领域，像 NASA、JP Morgan、企业界等等，也许在美国，那些离开数学界的人，仍有很多不同的工作机会。

乌：事实上他们并没有离开数学界，很多领域需要的是数学人才而不是数学研究的题材，他们想要的是数学家拥有的思考模式。他们根据经验发现数学的思考模式其实非常有用。

你之前提的那些人不做纯数学的研究，但是纯数学研究只是数学的一小部分。我们的工作不是只培育数学家，虽然很多数学家是这样想的，事实上，我最好的一些学生从事完全不同的工作，有些从事教育，我有两个女学生和一个男学生，这个男学生确定他想要教书，他想要做一点研究，而更多心力放在教书的工作上，我很鼓励他。

事实上，我不鼓励那些不喜欢教书的纯数学学生。如果他们不爱教书，在大学里身为一个纯数学家是很无趣的事，因为他们的工作是和大学部学生、研究生、博士后研究互动。当然有的数学家只做研究而不教书，但那是很奇怪的事。

我必须说，当你年纪渐长时，你必须更小心地管理你的时间，特别是女性，教学和研究可以花掉你所有的时间。

李：我没有足够的时间。

乌：我知道你没有足够的时间，但是你有足够的体力，我已经没有足够的体力去做所有我想要做的事情。你最好和很多其他系有良好的关系，鼓励你的学生去信息系、生物系等修课。尤其是信息系，那里提供了很多适合那些做数论和代数的纯数学家的课程。

刘：当你回想你早期的生涯，你周遭有许多令人兴奋的事和人，请你谈谈。

乌：我记得非常清楚，1979 或 1980 年在普林斯顿高等研究院，丘成桐筹划了一个会议，每次我回想起来，我是里头年纪最大的，那时 38 岁，丘比我年轻五岁，Leon Simon 和 Jean Pierre Bourguignon 也和我差不多年纪，其他年轻的人，像 Peter Li，Robert Bryant 才刚拿到博士学位。我第一次花那么多时间和其他的数学家讨论，的确是令人兴奋。我从那时候开始和 Richard Schoen 合作，这是我第一次参与数学界的学术圈，之前我比较孤立。我一直认为丘成桐是我最欣赏的人之一，我觉得他像是一个将军在全世界中行军，多年来他一直是很好的将军，他总是有令人惊讶的好想法，而且仍然带领许多数学家前进。

我将我在数学学术圈里真正起步归功于他，他仍然给予很多学生这样的起步。

那时真是令人兴奋的时刻。

刘：在 1979 年以前，你已经非常有成就了。

乌：是的，但是我都是自己完成的。我和一些学生合作，像是我在伊利诺伊大学 Urbana-Champaign 校区的博士后 Jonathan Sack 研究，我也和 Lesley Sibner 和 Robert Sibner 有些合作。

我跟你们说一个故事，记得在 1971 或 1972 年的暑假，我在的里雅斯特 (Trieste) 遇到 Lesley Sibner，我当时是个听众，她穿着紫色皮草粉红套装演讲，她讲非线性 Hodge 定理，用一个我当时正在思考的形式：那是一个令人惊奇的时候。我总记得当我遇见她时，我很兴奋，她是个成熟稳重的纽约人，我觉得自己是个乡下女孩，而我们成了很好的朋友。

我结婚后搬到布兰戴斯大学，在我得到博士学位之前，曾经在纽约大学当过一年的学生，Cathleen Morawetz 是我第二学期的复变老师，我当时对

她不是特别欣赏，她看起来总是那么疲倦，但是她很努力地讲课。很多年之后，当我差不多是她当时那个年纪的时候，我想起她，也觉得如果她当年可以做，我也可以做。那时，她有四个小孩，她在教书的同时还抚养七个小孩，但她依然如此成功。我总觉得榜样是非常重要的，有各种不同类型的榜样使你崇拜着是很重要的。Cathleen 现在依然每天到 Courant Institute，上次我去 Courant Institute 还曾和她讨论。

刘：在 1979 年以前，你大部分的工作都是自己完成的，你是如何发现那些问题的？

乌：我的论文是关于变分法 (calculus of variation)，所以我知道这方面的问题。

我知道我必须证明存在性，我知道得到存在性所有该做的事，那些都是非常经典的问题，当时有的理论并没有办法用来做那些经典的问题，我的论文是关于大域分析 (global analysis)，而我们第一个用在三维拓扑上的是大域分析各个大理论中的非线性分析，基本上是几何中非线性问题的解法。问题是，大域分析并不能解决任何其他的问题，也不会引导出其他的问题，这个理论需要大的技巧性工具，对学生相当难，那时几何中的非线性热流 (nonlinear heat flow)，没有发表的学术文章可以学，它是非常经典的理论却不是很有意思，非常标准的理论，却没有在任何地方被写下来，大家仍在引用 1967 年 Eells 和 Sampson 在流形上的分析那篇文章，我的论文指导教授 Palais 教我流形上基本的分析，但是从那里没办法做其他的问题，所以那些论文研究大域分析的人纷纷做不同的事。那时候我知道该做什么问题，我知道抽象的创建，我只是不知道如何解决，但是我有了一些起步。我研究测地线、最小曲面和 regularity 理论。

事实上，我最难的一篇文章是 1977 年的 Regularity for a class of non-linear elliptic systems。关于这篇文章，我有一个故事，我着手这篇文章的过程非常艰辛，我遇见 Jürgen Moser，我念他的文章。他对我非常好，他很友善而且很帮助我。我念了所谓的 Moser iteration，我从来没有和其他人谈过。

在某个时候，20 世纪 70 年代中期，我不记得为何我会在斯坦福，但是我记得我走进丘成桐办公室，Schoen 当时也在那里，他们问起这篇文章，我非常惊讶，我以为没有人会注意到这篇文章，从来没有人问过我这件事，我惊讶有人知道这篇文章。

这篇文章是后来能得到 pharmonic map 的 regularity 的一个动机。

刘：当你说你知道那些问题，这表示你面临了这些问题，而把危机化为转机。

乌：是的。事实上我仍然记得 Guisti regularity theory。当我还是研究生

时，我知道一些新引进的技巧，Palais 是一个非常好的论文指导教授，当我问他热方程，他是那种会给我讲一小时的课，把接下来 15 年所有关于热方程我必须知道的事情都教给我的人（我仅有在近几年才需要对热方程知道更多）。他那时候也许对 Guisti 的文章感兴趣，我念了他的几篇文章，我发现念文章要花好几个月的时间，而不是念过就可以了，你必须真的花时间好好想过。我没有念过很多文章但是我从每篇念过的文章中学到了很多。但是现在我不像以前那么知道该念哪篇文章。

刘：大家都知道乌伦贝克是多么杰出，但在正确的时刻进入一个领域也是很重要的。

乌：这点非常重要。事实上关于研究哪个领域，我现在不知道该给年轻人什么好的建议，我不是那么确定。我用心想一些，也到处看看物理方面的几何进展得如何，现在是非常的代数，是代数几何。事实上这是为什么我不再做规范理论 (gauge theory) 和物理方面的几何了，因为物理中几何是非常的代数。

我念了一点相关的，但是我已经太老以至于不能学习，我非常清楚因为我了解在可积系统里的问题，那里有个在硬分析和我们所谓 loop group actions 的落差，只有当你可以做 scattering 理论时，才能以分析的角度适当地写下这个问题。如果你不能做 scattering 理论，你必须做非常代数的部分。

黄：那关于广义相对论呢?

乌：我告诉你一个我个人关于广义相对论的故事。当我从 Brandeis 拿到博士学位之后，我的论文指导老师 Palais 送我到加州大学伯克利分校去学广义相对论。

从 Abe Taub 我学了两学期的狭义和广义相对论，还有量子场论，跟 Rag Sacks 学了一个学期，Taub 是个非常好的人。我当时在伯克利是个讲师，但是即使你拿到博士学位，你还是应该坐在教室里听课。

当时有很多数学家也在那堂课里听课，其中还有一个研究 compact groups 的年轻助理教授。

因为有很多数学家在课堂上，事实上其他研究生会有一点挫折感。那正是越战的时候，到处有游行，课程取消了，所以其实谈到的并不是很多，但那时非数学性的学生活动非常令人兴奋。

但不管如何，当我发现研究相对论、宇宙学，你必须把 Navier-Stokes 方程式放在手边时，我就觉得那太难了，只有当你了解 Navier-Stokes 方程式和流体力学后，才有可能了解广义相对论。

我在大学部当学生时，试过证明正质量定理 (positive mass theorey)，我的论文指导老师告诉我，关于这个问题一个可能的解决方向是用变分法

(calculus of variation)，我记得不是很清楚，因为我并没有任何进展。我在伯克利写了一篇关于 Lorentz 流形上的测地线的文章，我实际上学了不少 complete geodesics 和相关的事情。

我之后的工作是在伊利诺伊大学 Champaign 分校，当时我花时间念 Penrose 和 Hawking 那时的文章，但是那时没有人研究这个领域，我是当时唯一一个研究 Lorentz 几何的人，我开始做最小曲面的问题，那是一个更困难的领域。有趣的是，几年之后，其他人回过头去念他们这些文章，我遇到那些念过这些文章的人，但是我并没有再重新研究这些。

刘：你只是跟着你的直觉然后做你想要做的问题。

乌：就像我告诉你的，也许我改做非线性波方程并不是特别好的部分，当初的动机是好的，我之前知道的不够多，我花了很长的时间在基本的事情上，我仍然不知道该念哪一篇文章。在这个领域里最聪明的人是 Terry Tao（Terry Tao 为 2006 年菲尔兹奖得主之一），我对他并不很了解，他非常年轻而且做了很多不同的事，我们可以等着看他可以做出什么，他是一个在澳洲出生的中国人，他做数论、调和分析 (harmonic analysis)、偏微分方程。

如果让我从我了解的领域里挑一个人，我觉得你应该留意他，他是一个真的很聪明的年轻人，也许在代数几何或其他学科也有很聪明的人，但是我是指就我所知的数学领域来说。

刘：每个时代都有聪明的人，这是很好的事情，对现在这些年轻人来说，还有很多可能性也是极好的。

乌：你说的对，我正在想这个事。有点令人失望的是，几乎没有特别天才的女数学家。

但是，例如丘成桐的学生刘秋菊 (Mellisa Liu) 做了很多不同的事，广义相对论，Yang-Mills，quantum cohomology，mirror symmetry。

她做得很好，而且比 Terry Tao 年轻，也许她会感觉到更多的压力，就因为她是个台湾女数学家。

Atiyah 的学生 Francis Kirwan 比较资深，也做得很出名，她在英国的系统下教书，这对她很好。她可以抚育小孩而不用担心终身职位的问题。事实上，英国系统有一些好处，因为你得到的工作是永久的。

李：我也听说你对于研究的方向有非常强的直觉，这是从你的个性而来的吗？

乌：你必须花很多的时间想问题。我年轻的时候，很不容易入睡，所以用了大量的时间在床上想数学问题。建立直觉是很困难的，但你总要花时间想问题，而我不确定要如何教导他人建立直觉。

刘：也许你可以告诉我们你的童年时代。

乌：我父母亲是他们家族中第一代上大学的，他们在 1932 年上大学，那时正值大萧条 (great depression)。我父母亲对于金钱非常保守，我父亲是一位工程师，母亲是艺术家，在高中教美术。他们在当时过得很艰苦，我父亲从 MIT 大学毕业后到犹他开始他第一份工作。他们没有提过太多，但是我知道父亲进入 MIT 时得到家庭中的补助，母亲在艺术学院念书，但是她体会到她不能把当艺术家作为有薪水的正职，所以转换到高中当老师。这大致上是他们对我的影响。跟我同年纪的人，他们的父母在大萧条的时候都有过苦处，生活是很艰辛的。

1942 年，当大萧条结束，我父母亲有足够的钱生养小孩时，我在俄亥俄州的克里夫兰出生。

我父母亲来自于新泽西和纽约。1945 年二次世界大战结束，我们搬回新泽西，我在那里长大。

我很幸运，虽然在家中受的数学教育不多，但父母给了我艺术、文学、音乐方面的影响，我现在六十好几，回头看，这些教育对我是分外珍贵的，如今我对于数学不再如以往一般兴奋地参与其中，至少在我的生活中还有其他的事情去做。

编者按：本文原载于《数学传播》2006 年第 30 卷第 3 期。

数学家访谈

庞加莱猜想与里奇流

—— 曹怀东教授访谈

曹怀东，美国里海 (Lehigh) 大学数学系的 A. Everett Pitcher 讲座教授。1981 年本科毕业于清华大学，1986 年在普林斯顿大学数学系获得博士学位。师从著名数学家丘成桐。主要研究领域为微分几何，涉及 Kahler-Ricci 流、数学物理等众多方面。曾获得 Alfred P. Sloan 基础研究奖金 (1991 — 1993)，John Simon Guggenheim 基金会奖金 (2004) 等，是国际著名数学杂志 *Jounal of Differential Geometry* 的执行主编。在 Ricci（里奇）流的研究中做了许多重要的工作，受到 Ricci 流理论的创立者美国科学院院士 Richard Hamilton 的高度评价，并且为庞加莱猜想的最终解决做出了重要的贡献。

编者按：本访谈根据 2004 年 7 月 17 日在浙江大学 BBS 上曹怀东教授与学生的在线交流整理而成。

“问”代表网友提问，“曹”代表曹怀东教授的回答。

问：去年或前年的时候，俄国数学家 Perelman 宣布证明了庞加莱猜想，现在一年多时间过去了，请问这个证明已经审查得怎么样了，您是 Ricci 流方面的国际权威，能否发表一下您个人的看法，这个证明完全正确的可能性有多大，还有请问 Perelman 教授的年纪，以及如果这次庞加莱猜想完全证明，那么会有哪些人和 Perelman 一起分到克雷数学研究所的 100 万奖金呢？

曹：审查还在进行中，希望尽早能得到完全证实。从目前审查的过程看，正确的可能性相当大，但是不到最后审查完毕我们还无法下定论。Perelman 教授 38 岁出头，所以下次菲尔兹奖年龄是符合的。当然我特别希望 Hamilton 教授和他能一起分享这 100 万奖金。正如 Perelman 自己所说，“Hamilton 教授引入了 Ricci 流，发展了许多惊人的理论，改进了许多 Ricci 流中的重要定理，我应该算是他的学生”。

问：在美国的众多大学中，里海大学好像并不是很有名，您能否简单介绍一下那里的数学系的情况，每年招多少中国学生呢？

曹：在美国的众多大学里，虽然里海不是最有名的，但是有很强的微分几何传统，《微分几何杂志》就发源于此。我刚去一年，了解的还不是很多。每年招中国学生 1 ~ 2 位，我希望以后能招更多的学生，尤其是几何方面的好学生去申请。其他方面，如代数拓扑也有很优秀的教授。

问：Ricci 流最初是 Hamilton 为了研究庞加莱猜想提出来的，现在 Ricci 流的研究是否已经在其他数学问题上找到了应用。如果 Perelman 的证明是对的话，以后 Ricci 流还有继续研究的必要吗？

曹：Ricci 流主要是研究流形上的几何结构，如爱因斯坦度量以及对拓扑的应用。当然三维以后还有很多其他应用，Hamilton 教授指出，研究四维流形的几何化以及凯勒流形上的 Ricci 流将是主要的问题。如 Perelman 所说，"Ricci 流之所以重要，是因为它属于现代数学的主流分支"，不仅仅是在拓扑方面的应用。Ricci 流是一类非常重要的非线性方程，任何对其奇点结构的理解都将十分重要并且对整个非线性分析也非常有意义。我想上面这段话回答了你最后的问题。

问：当初您是在普林斯顿拿到的博士学位，听说您是丘先生带的第一位中国学生，而且您在普林斯顿的时候也应该亲眼目睹了丘先生获得菲尔兹奖。这对您也应该是很大的鼓励吧。我想问个问题，您在国外发表的头四篇文章都是在一流杂志 *Inventiones Math.* 上，您是否很注重文章的质量，宁缺毋滥呢？现在很多国内的大学，要求硕士生就要发文章，包括数学系，您觉得这样好不好呢？

曹：如果硕士能力很强，当然可以发表高质量的文章。但是要求所有硕士发文章，就数学系来说本人不敢苟同。能够写一篇高质量的博士论文就相当不错了，研究生期间应该有时间多学、多看，做有意义的好问题，要有好的数学鉴赏力。能跟名师当然会受益匪浅。我受丘先生和 Hamilton 的影响非常多，也是很感幸运了。

问：听到一种说法，说现在中国数学家（包括在国外工作的华人数学家）在微分几何学科上已经很有影响力了，特别是在陈省身和丘成桐先生的带动之下。而其他学科，比如代数几何、代数数论，好像优秀的中国的数学家就少了一点。您是否觉得现在我们应该着重发展这些学科呢？

曹：中国在代数几何、代数数论方面也有很优秀的数学家，如李骏、张寿武。同微分几何比，人数固然少一些。同学们要有兴趣研究代数几何、代数数论当然是好事，应该争取跟名师攻读博士。

问：现在的数学好像发展得很庞大，优秀的数学家也特别多，请问您觉

得现在国际上特别厉害的年轻数学家有哪些，比较有可能拿到 2006 年的菲尔兹奖的呢？

曹：Perelman 当然是 2006 年拿菲尔兹奖的最佳人选。

问：有些文章上说研究微分几何最好能会法语，陈省身先生在讲座中也提到过这点。不知您怎么认为？还有在法国的名校，如巴黎高等师范学校和美国的大学比较，要学习微分几何，各有何优劣？

曹：我本人对法文就很有兴趣，在普林斯顿读研究生的时候就上过一年法文，不过对我来说更多的是欣赏它动听的语调。当然法文对学习微分几何和其他数学分支也是非常有用的。我对法国了解不够多，张伟平教授要比我了解得多。

问：Hamilton 教授的 Ricci 流为他赢得了很大的荣誉，这是一项非常具有原创性的工作，而且把分析学的技巧应用到拓扑学的研究中去。那么在 Hamilton 刚开始着手研究 Ricci 流的时候，他是否考虑过会在这个问题上耗费很大精力，而最后一无所获，或收获很少呢？比如我想应该也有很多花了很大精力研究费马大定理的数学家，最后可能也很少有成就的。数学上做大问题，是否也需要很大的勇气呢？我个人特别佩服一些很有原创精神的数学家。

曹：Hamilton 发明 Ricci 流受英国数学家 Eells 影响很多，在美国康奈尔大学任职时就做过调和映射流带边界的问题。他确实是非常具有原创性，我想他发明 Ricci 流时完全是凭着一种强烈的兴趣和极好的直觉，不会过多考虑在这个问题上会耗费很大精力而一无所获。他本人私下说：当年丘成桐先生得知他想用 Ricci 流去研究几何，以为他发疯，连丘先生这么一位能大胆设想大胆创造的人都会这么以为，可见发明 Ricci 流要有多大的勇气和执着。Hamilton 说丘先生的评价是他以为他一生中最好的夸奖。当时也有别的教授提议他先考虑二维流形上的 Ricci 流试一试，看一看再说，再考虑三维，幸运的是他并没有接受这一友善的建议，否则他也可能需要推迟若干年才会研究三维流形上的 Ricci 流。在某种意义上来讲，黎曼面上的 Ricci 流比研究具正 Ricci 曲率的三维流形上的 Ricci 流要更加困难。原创性是极为难得的。

问：我是基础数学专业的研究生，我自己在看书过程中有时会遇到书中没有给出证明的一些细节问题，就是看上去很简单初等，看着差不多对，但自己好像很难给出证明。而且问导师和同学，他们也不太愿意帮我解答。请问这种时候，我是否应该先跳过这些细节呢？我不知道对从事基础数学研究的人而言，这是否是一种普遍的情况？

曹：这要酌情而论。有些细节问题很根本，应该尽可能搞清楚。打基础的时候还是应该扎实些。你碰到的问题应该是蛮普遍的。

问：当初您在普林斯顿读博士的时候，为什么会考虑去研究 Ricci 流呢？

您当时是否还有其他可以选择的研究方向呢？今天看来，您是否觉得当初是选对了方向呢？

曹：我到普林斯顿的第一年刚好是 Hamilton 三维流形上 Ricci 流出现，丘先生请他到普林斯顿高等研究院演讲。我研究 Ricci 流完全是受丘先生影响。在 Hamilton 演讲完不久，丘先生就让我和周培能在高等研究院仔细报告 Hamilton 的文章，对我来说真是逼上梁山啊。因为当时刚到美国，大学里没有学过微分几何，第一次听丘先生讲课如同听天书。硬着头皮早起晚睡一边自学微分几何，一边读 Hamilton 的文章，幸运的是，Hamilton 也不是微分几何出身，所以他在他的文章中微分几何的背景知识写得比较多，文章几何直观很强。倒使我学到了基本的东西是如何在 Ricci 流里得到了应用。我一直都觉得当初的方向是选对了（就像在 20 世纪 80 年代初买了微软的原始股一样），深信丘先生对数学的洞察力。研究凯勒流形上的 Ricci 流是丘先生给我的一个论文题，当时我就试图解决第一陈类上面的问题。至今这都是一个未解决的问题。

问：我觉得数学家好像会比一般人过得简单一点，就是说数学家的兴趣一般不会特别的多，因为他们把时间都投到研究上去了。我想问一下，比如当你正在思考一个关键的数学问题的时候，而您的孩子或太太希望您陪他们一起逛街或看电影，那么您一般会怎么办呢？对一般的数学家来说，这样矛盾的时候是否经常有呢？

曹：我想你说的大概是中国数学家里面的一种现象，美国的一些有名数学家兴趣相当广泛，如 Hamilton 就喜欢骑马、冲浪，数学也是他的一个爱好。如果我在思考一个关键数学问题的时候，我会告诉家人，然后说以后会安排时间陪他们逛街、看电影、下馆子。很幸运的是，我太太非常能理解我。

问：作为一位国际著名的微分几何学家，您是否能谈一下，您的研究经历中，对您影响最大，让您非常难忘的某些时刻，比如您是否有因为一个难题茶饭不思的时候，历尽千辛万苦终于证明一个重要结论。您对国内的数学学子有没有什么忠告和建议？

曹：证明凯勒流形上 Ricci 流的 Li-Yau-Hamilton 估计是经历了将近四年的时间，最终确信证明是对的时候，是一个非常难忘的时刻。忠告：不要追求短时效应，眼光要放远。听说有学生为了一年多几千美元的奖学金而放弃去哈佛反而选择二流的学校，实在不敢相信其目光如此短浅。

问：您说的那个您在博士论文里就试图解决，现在仍然未解决的问题，大概在哪里（文章或书籍）可以看到它的叙述，可能很多人会感兴趣的。

曹：这个问题就是在第一陈类为正的情况下，Ricci 流的解当时间 t 趋于无穷时，是什么样的一个渐近行为。在我的毕业论文中，我证明了解的长时

间存在性。但在 t 趋于无穷时，是否一定收敛于凯勒–爱因斯坦度量，或者是收缩到凯勒–Ricci 孤立子（可能出现奇点），这还是一个未解决的问题。最近 Perelman 在这个问题上也有不少进展。

问：美国的大学是否对教授发表论文有很高的要求，比如是否每年都要有一定的篇数，还是拿到终身教职以后，就可以轻松一点了。我们既听说 publish or perish，又看到怀尔斯这样的，为了证明费马大定理，可以发很少文章，继续当教授的。

曹：拿到终身教职以后，对教授发表论文的数量并没有明确要求，一流大学和二流、三流大学在这个问题上差别很大。我想怀尔斯如果是在一个普通公立大学，受到的压力会大得多。确实在不同程度上，你在系里的学术地位甚至涨工资都会跟你发表的论文，尤其是高质量的论文关系很大。

问：您能简单介绍一下您最近的主要研究工作吗？您在浙江大学数学系可以带学生吗？

曹：最近的研究主要集中在凯勒–Ricci 流方面以及和 Hamilton 及 Ilmanen 合作研究 Ricci 流与四维流形的关系。也欢迎申请到里海读研究生。

问：前天数学中心有一个座谈会，是很多著名数学家在一起和大家聊数学，其中就谈到他们是如何走上数学研究道路的，比如 Gelbart 的父亲是数学家，所以影响了他；而林芳华、管鹏飞教授考大学的时候是“文化大革命”刚结束，他们读大学的出发点主要是为了不当农民，后来才慢慢对数学感兴趣。那么您是为何选择数学作为职业的呢？

曹：我大概是从小受父母的影响，尽管他们从来不过问我念书，但我父亲是数学教员，家里有不少数学书可以翻阅，不知不觉就走进去了。1977 年高考的时候，想都没想就报了数学专业。

问：数学对您的人生观各方面有多大的影响？比如是否让你分析生活中的问题更加理性？

曹：我想应该如此。

问：作为数学家，您一定拥有很多数学界的朋友，那么您是否也有很多其他从事非数学研究，甚至不是从事科学研究的朋友呢？是否和他们的谈话也会对您的数学研究产生好处呢？

曹：朋友中大都是从事科学研究或在公司工作的，同一些工程、物理专业的朋友谈话也常常会谈到跟数学有关的内容或者是他们的研究跟数学的关系。

探索奇异点之谜

——广中平佑访谈

Allyn Jackson，译者：胡崇海

艾琳·杰克逊 (Allyn Jackson)，美国数学会数学通报杂志主编和资深撰稿人，撰写了大量通俗易懂的数学时评、纪事和名家传记，采访过陈省身、亨利·嘉当、格罗滕迪克、广中平祐等众多数学大师。

广中平佑是 20 世纪代数几何的先驱之一。他最著名的工作是 1964 年在代数簇的奇点解消问题所做的贡献，并因此获得 1970 年的菲尔兹奖。这个问题的本质在 20 世纪初叶被若干数学家先后发现，值得一提的人物是 Oscar Zariski，他解决了曲线和曲面的问题，这对广中带来了很大的影响。通过相当本质的途径，广中创造出了一些新的代数工具，并将已经存在的那些适合该问题的方法进行了推广，而这些工具还在那些与奇点解消毫无关系的问题中找到了用武之地。另一个主要的影响来自于 Alexandre Grothendieck，他于 1959 年曾邀请年轻的广中第一次访问巴黎高等研究所 (IHES)。2002 年的一篇新闻报道了广中平佑基金会的成立，其目的在于增强 IHES 和日本数学家之间的联系，其中引用了 IHES 教授 Mikhael Gromov 对广中的奇点解消工作的评价："它在数学的发展史上是独一无二的，它是世界上最难得到的成果之一，在当今仍然无人能望其项背。"

广中平佑于 1931 年 4 月 9 日出生在日本的山口市。当他还是东京大学的学生时曾经是 Yasuo Akizuki 讨论组成员，后者是日本现代代数的先驱。广中于 1960 年在 Zariski 的指导下博士毕业后，相继在 Brandeis 大学和哥伦比亚大学任教，并于 1968 年成为哈佛大学的教授，之后的 1975 年到 1988 年期间还担任了东京大学的兼职教授，在 1983 年到 1985 年期间受聘为东京大学数学科学研究所的所长。他获得 1970 年的日本科学奖章和 1975 年的日本政府文化勋章。广中在日本获得的荣誉和尊重令西方人羡慕不已，一名没有太多数学或科学背景的普通日本人民往往都对他的大名有所耳闻。

广中花了大量的时间和精力鼓励青年一代热爱数学。他于 1980 年相继创办了面向日本高中生和面向日美大学生的夏令营活动，到目前为止，这些活动在他的领导下已经持续开展了二十余载。为了支持这一系列活动，他于 1984 年建立了一个名为日本数学科学组织的慈善基金会，该组织同时也为赴海外攻读博士的日本学生提供奖学金。在 1996 年到 2002 年期间，他被认命为位于他家乡的山口大学的校长。直至今日，他还积极参与教育活动，特别是在当地范围之内，同时仍然做一些数学研究。

下面是美国数学会新闻月刊 (*Notices*) 的高级作家兼责任编辑 Allyn Jackson 于 2004 年 12 月对广中平佑的采访实录。

家庭和童年

Notices：您于 1931 年出生于山口市，我对您儿时在那儿的生活和家庭状况很感兴趣。

广中：我出生在一个很小的镇，到目前我的兄弟还住在那儿。山口市离广岛不远，那个小镇就在山口市的东边，面朝内海，人口是三千左右的样子。那里的人民一半从渔一半务农，但是我的父亲是一位经营服装的商人。

Notices：您的家庭有多少孩子？

广中：我总共有 15 个兄弟姐妹，准确地说应该是四加一加十。我父亲在第一个妻子死后与第二个妻子结婚并且生有四个孩子，我母亲在她的先夫去世之后和我父亲结婚，在这之前她也有一个自己的孩子，所以在我父母结婚之前，他们已经带下来五个孩子了。之后，我的父母又生下了十个孩子，我是当中最大的男丁，上面还有一个姐姐。在第二次世界大战期间，政府鼓励多生孩子，特别是男孩，但是在战争之后，养育这么多孩子的确是一个很大的困难。值得顺便一提的是，在我母亲之前和我父亲结婚并生有四个孩子的那位先母是我母亲的姐姐。

Notices：那就是你父亲曾和一对姐妹先后结过婚。

广中：是的。我母亲的姐姐生病了，我想在这样的情况下我的母亲是想帮助她吧。我喜欢在一个大家庭里面。在我年幼的时候，我身边有一群同龄的孩子，还有那些我可以依靠或者学习的大孩子，这些都是很好的。并且当我和年幼的弟妹在一起的时候，会有一些去照顾他们的责任。我的父亲本来并不贫穷，但是战争使很多事情变得困难多了。在战争之前，他拥有一家纺织厂。他送第一个孩子去一所位于名古屋的工程学校学习纺织，送第二个孩子去学习商业，所以他对这两个孩子抱有很大的期望。然而，当他失去了这两个孩子之后，他彻底失望了。之后，他把厂给卖了，并且停止了工作。战后

的社会当然产生了很大的变化，经济萧条，货币贬值使得旧货币变得一文不值，同时也带来了一场深刻的文化变革。我父亲本来雇佣了一些农民，之后也不得不把土地分给了他们。战争结束之后，好像任何事情都变得疯狂了。

Notices：您所在的地方受到原子弹爆炸的影响了吗？

广中：其实，我父亲已经看到了，但是由于离得比较远，所以他没有受到影响。我的表兄弟当时在广岛就读并且被辐射灼伤了，不过他康复并生存了下来。在我们这个区域的人还算是幸运的了，但是对轰炸却产生了恐惧的心理，每当我们听到飞机来了就开始四处躲闪。那时，他们还不叫它为原子弹，而是称之为“特别的炸弹”。在那个时候，美军占有了绝对的制空力量——虽然陆地上还不绝对，但制空权绝对被控制了。一旦我们看到飞机来了，流言就开始传开了：“大概是‘特别的炸弹’来了吧。”

在这样的情况之下，青年一代普遍对未来感到失望，但是小孩子们却不是这样的。孩子们不知道呀！实际上，我们却很开心。美军在海床上埋设了很多的地雷，当战争一结束，我们就把这些东西给挖掘出来并且引爆它们，这很像一个个巨大的爆竹。我们很喜欢这些！

Notices：您是从小就开始对数学感兴趣了吗？

广中：当还是小孩子的时候，我们都充满了幻想。记得小学的时候我想成为一名 naniwabushi，是说书的一种职业，他可以讲小瘪三的故事、讲武士的故事、讲悲情故事或者那些带有说唱的故事。我喜欢这个职业，也想成为这样的人。但是到了中学我就开始思考一些数学问题了。实际上，初一的时候我就对数学很有信心了。

Notices：当您年轻的时候，有没有哪位数学老师在某一点上让您倍感鼓舞？

广中：没什么特别的感觉，只是那种得到老师表扬之后的开心，比如在你考得还不错的时候。我只经历过这样的一些感受。

Notices：您同时还学习音乐吗？

广中：我在初中的时候想成为一名钢琴家，但是那个时候只有学校里才有钢琴。我们学校是在 Yanai，当时坐火车去大约需要 30 分钟。我要趁上课之前坐早班车去学校练钢琴。我只能照着书弹。一直以来都是音乐老师教我一点然后我去学，但是并不正规。某一天他们让我去参加一次和其他学校合办的音乐会，并让我演奏肖邦的“即兴曲”，那是相当难的一首，然后我演砸了。女孩子们演得好多了，但是在男校里除了我之外没有人弹钢琴，所以他们就叫我去了。女校的老师对我的表现说了一些很难听的话，真让人大吃一惊。又在某一天，我向我的老师问起这件事情，老师说我不会成为一名音乐家，因为一名音乐家，特别是钢琴家，都是从三岁就开始训练的，并且往往

都有专门的老师指导。而我是从初中开始学的，并且没有真正的老师，所以那位老师跟我说，我应该忘掉它，然后我就答道，“好的，我会忘记掉它的”。

不过，我仍然喜欢钢琴曲和古典音乐，并且对音乐家也感兴趣。在 1959 年到 1960 年，我在巴黎的时候遇见了 Seiji Ozawa，并且成了他很好的朋友。Seiji Ozawa 现在指挥维也纳音乐剧。他每个夏天都会来日本待两个月，并且还参与松本市的 Saito-Kinen 节，Saito 是他的老师。期间 Ozawa 会花上两到三个星期来指挥管弦乐，并且还指导青年学生们。有一个专门的组织来筹备这个庆典活动，Ozawa 还曾邀请我担任这个组织的主席。

从我在巴黎遇到他之后，我们才在一起相处了大约六个月。我们彼此成了好朋友，不过后来我就把他给忘了，因为我还得返回哈佛去拿我的博士学位。我博士毕业之后，开始是在马萨诸塞州的一个地方工作。有一天我突然收到他的来信说他即将初访美国，所以我去机场迎接他，他是来参加在 Tanglewood 举行的一次比赛。Charles Munch 是评判团的主席。Ozawa 在那次比赛中获得了指挥的一等奖。我去 Tanglewood 观看了他的指挥，之后他返回巴黎。后来到 1964 年，我成为哥伦比亚大学的教授，他在纽约，和 Leonard Bernstein 共事，所以我跑到他那儿听了他的音乐会。再后来到 1968 年，我回到哈佛做了教授。后来他去波士顿交响乐团成了一名指挥，所以我们之间的友谊也维持了下来。我猜呀，他喜欢我的原因可能是由于我对音乐了解不多吧！

Notices：我们还是回到数学的主题上来吧，从什么时候开始你才真正喜欢数学的？

广中：要说我什么时候开始真正考虑成为一名数学家，应该得算上高中的那次。那天我们学校来了一名广岛大学的数学教授，他给学生们做了一个概貌性的讲座，因为稍微有点专业，我并没有听懂所有的东西。不过他在讲座的开头大体上讲了这么一句话：“数学是一面镜子，你可以把世界万物都映射到它上面。”这句话让我感到很困惑，但是却给我留下了深刻的印象。我申请进入广岛大学是由于想从师于他，可是，我并没有为入学考试好好学习，然后我失败了！

所以我又接着读了一年，并且申请去了京都大学。那时我想成为一名物理学家，只是为了一个天真的理由——没有什么东西是严肃或者富有哲理的。那是因为物理学家 Yukawa 是日本第一个戴上诺贝尔奖桂冠的人，并且他就是在京都大学的。幸运的是，我有一个姐姐嫁到了京都，所以我可以住在她那里。第一年的时候我很努力地学习物理，还有化学和生物。但是到了第二年就明显地看得出来，我是适合学习数学的，而不是其他自然科学。在我学习的时候一旦遇到数学问题，我就会有一种兴奋感。所以，大概是在第三年的时候就很明显地感到也许数学就是我未来的职业。后来，我就专攻数学了。

Notices：那个时候京都大学的数学教授怎么样？

广中：那时我们还小，所以知道得不多，不过，我们都有一种感觉，日本的数学和其他自然科学都远远落后于美国和欧洲。所以，我们都想方设法去欧洲或者美国。但是，那时的日本也有一个做得很好的方向，那就是抽象代数。对我来说这是幸运的，并且一定程度上也决定了我做数学的方式。日本的数学家都努力想成为各个数学前沿中的佼佼者，并且抽象代数在那时至少看起来像数学的前沿领域，而其他那些工程师和物理学家在使用的数学则被称为“俗气的数学”。我的老师和他的同事们都对抽象代数和数论等更加感兴趣，几乎都是抽象的类型。所以，当我有机会去美国的时候，至少有一样东西我是有信心的，那就是抽象代数。

Notices：您是怎么去的哈佛并且师从于 Zariski？

广中：我于 1949 年进了京都大学并且念完四年大学，然后又进入京都大学的研究生院学习。那时 Akizuki 是那里的教授，他在代数几何上做的工作并不多，但是却对它很感兴趣，并且在日本创立了代数几何，特别是在京都。他首先邀请了一批在代数几何领域里面年轻有为的学者，那时日本的大学都是雇佣自己的学生，但是他却没有雇佣任何自己的学生。他邀请了四到五位学者组成了一个研究小组，一个来自于名古屋，一个来自于大阪城市大学，一个来自于东京大学，等等。并且他的讲义因内容前沿而被大家普遍喜欢。其他的课程却给人一种枯燥的感觉，如古典复分析和诸如此类的东西，写在乏味的课本上。但是 Akizuki 却相当另类，他尝试着介绍一些新的东西并且邀请了很多人过来。我参加了那个研讨小组，并且我是当中最小的成员。

有一次 Akizuki 邀请了 Zariski 来京都，Zariski 是当时把代数几何做得很代数化的学者里面最好的人之一，他做所谓的很代数的代数几何。他的理念是，当基于代数来做几何的时候，你就可以避免被几何直觉的误导。他说过，当他基于代数来做代数几何的时候，严谨性是自然而成的，不会有丝毫的疑问。代数可以变成一种“抽象的无趣”——玩着一大堆的符号却不用管它们都代表了什么。但是，Zariski 还有 Akizuki 都认为我们应该用代数来做几何。当 Zariski 来的时候，我就努力想告诉他我在做的东西，可是我的英语向来很差！但是我的同事和老师们帮我向他解释了我做的东西。有一次 Zariski 跟我说，“也许你可以去哈佛学习”。然后我说，“好的”。

Notices：您是什么时候去哈佛的？

广中：1957 年，Zariski 回去后的那个夏天。我对年青一代的忠告是，如果你想出国，即使是在日本国内读书，一定要跟随你这个领域里面最好的学者，但是你却不要期盼着想从他那儿学到什么！非常可喜的是，在那种人身边有很多有天赋的青年学生，并且你可以从他们那里学到不少东西。不管怎

么说，我也是属于这样的情况。我从 Zariski 的文章里面学到不少方法，有时他也会给我一些建议，但是他实在太忙了。他的学生里面还有 Michael Artin、Steve Kleiman 和 David Mumford，有时我们四个人会开一个我们自己的讨论班。我们都是学生，所以有很多的时间来讨论数学，并且没有正式的任务，做学生真好！

奇点解消

Notices：您第一次对奇点解消的工作感兴趣是什么时候？

广 中：我想是我在京都大学第三年的时候。那时大约有十个人参加了 Akizuki School（我们都这么称呼它），总是在一起讨论问题并且开讨论班。我几乎总是听众，因为我是当中最小的一个。有一次有人在小组里面介绍了奇点解消问题，那时我第一次听说了 Oscar Zariski 的名字。我想这是一个相当有趣的问题，然后我就决定去做它。虽然我没有什么工具，可以说一无所有，但是我却觉得这个问题很有趣。所以这个问题一直萦绕在我的脑海里面，虽然我没有去直接解决它。

那时我还在读代数几何的入门资料和一些 Jean-Pierre Serre、Andre Weil 或 Zariski 的文章，但是我想那应该是我第一次对那个问题感兴趣。它帮我下定了进入代数几何领域的决心。

Notices：那个问题为什么看起来对您意义重大？

广 中：我不知道。就像一个男孩爱上了一个女孩，很难说出一个所以然来。然后你也可以做出很多解释。比如，我学了很多的抽象代数，所以对那些能够用代数来表达的东西总是觉得很有兴趣。但是，代数本身太抽象了，让你捉摸不透。这是一个几何问题，但本质上不是几何。对我来说很显然你不能用几何的直觉来解决这类问题。Oscar Zariski 已经解决了它在一维曲线、二维曲线甚至还部分解决了三维上的问题。所以，它是一个高维上悬而未决的问题。在高维的时候你看不到所有的东西，所以你必须要有某些知识以及工具来猜想或者公式化一些东西。并且这个工具就是代数，毫无疑问是代数。那也是这个问题吸引我的一个原因。同时，我也喜欢基础的东西。那些非常聪明的人都倾向于跳往一个新的技术：那些正蓬勃发展的方向，并且想成为里面的佼佼者，如果你足够聪明，你就可以成为领跑者。但是我并不聪明，所以我开始做那些并不需要技术的问题——这是更好的选择，然后我就可以按部就班地去解决它。但是实际上它却并不是很难，比我想象中要容易。

Notices：真的这样吗？我读过一些评论，说您关于奇点解消的证明被誉为数学领域里面最难的证明之一。

广中：它并没有这么难，因为我从很多人那里学了不少东西。比如，毗邻京都大学有一所大阪大学，它的校长是一位名叫 Shoda 的数学家，他是日本近世代数的先驱。另外，在名古屋有一位叫 Nakayama 的人，也是从事抽象代数的，并且他有一位名为 Nagata 的高足，曾被 Akizuki 邀请来到京都。所以，我很幸运待在京都并且结识了这些人，之后我就遇到了 Zariski。Zariski 是一名真正的几何学家。当他在意大利的时候，他发现意大利的几何学家们都非常有直觉，所以他们经常做出一些证明有误但结论正确的论述。Zariski 想为这些结果找到一个坚实的基础，并且他选择了代数来做这件事情。我想这正巧是代数几何的大势所趋。Andre Weil 是做数论的，同时他也想把代数几何的基础代数化。当我在哈佛的时候，我学习了一些和几何有很强联系的代数技巧，而不仅仅是抽象代数。我本来就习惯于被抽象化的所有东西，所以我并不怕把东西给抽象化了。同时，Zariski 的一些学生却有很强的几何直觉，比如 Mumford 和 Artin。我记得我曾感到他们比我更像几何学家。他们是真正的天才。但幸运的是，我并不觉得比他们差，因为我的代数很好！并且，我有幸去了巴黎。Grothendieck 在 1958—1959 年期间来到哈佛，那时我是那儿的一名学生，我成了他的朋友，并且他说我可以去法国。

让我来对几何做一些阐释。几何有整体问题和局部问题。局部问题经常可以通过非常具体的演算来解决。举例来说，如果你有一个等式，你就可以把它写下来，然后进行泰勒展开，考虑它的展开项。但是，当你回到整体问题的时候，你会发觉各个局部的解并不相互协调。这也是 Zariski 曾经遇到的问题。他用了一种很局部的技巧：你有某个几何对象，你可以修改它，并且把它局部化。等你把它局部化了之后，你就可以用上很多的技巧，但是之后你还是不能把它连接起来得到一个整体解。Zariski 通过奇点解消来做，但即使在三维的时候就遇到了很大的困难，最后他放弃了。一般来说，如果你只有一个等式，那么是容易的，但是如果你有很多个等式，则是很困难的，或者说是给人们带来一种困难的感觉。但是我发现可以通过归纳法来处理一些等式。所以，我从一维开始，但是带有很多个等式，然后我察觉到高一维的情况，即使也会有很多个等式，但它却是同一类型的。这是一个很简单的发现，但是却在我的局部理论中起了很大作用。同时，整体问题并没有改变。你不能用整体的坐标轴，只有在局部的时候才会有坐标轴和等式。所以我在那儿遇到了问题，但是 Grothendieck——他真是一个不可思议的家伙！他并没有局限于这些等式组，而是从一开始就以整体的方式来看待所有的东西。所以他的方法对我很有用。

1960 年从巴黎返回之后，我就写了一篇论文，并没有解决奇点解消问题，但也是关于这个方面的。我已经做好了攻坚的准备。显然，一旦你完成了博士学位并且找好了工作，你就会有更多空闲的时间，特别当你还是一个老外

的时候，没有一份工作是一件可怕的事情。我在 Brandeis 大学落脚，我就开始想："这下可好，那现在我该做点什么呢？"然后我就对自己说："天哪，如果可以把京都、剑桥和巴黎并成一块儿那该多好，这样整个问题就可以解决了！"我是相当幸运的。

Notices：有人跟我说过您曾经处于一种非常痴迷的境地，并且形成了一个复杂得不可思议的证明。他拿这个和 Andrew Wiles 的费马定理的证明做比较，后者曾经在他的阁楼里面整整苦攻了七年。您也是这样的吗？

广中：任何问题都有很多方面，你想把它们组合起来一定需要你对整个问题进行深入思考。我记得我第一次打电话告诉 Zariski 我已经解决了这个问题，他说："你一定有很坚硬的牙齿吧。"

Notices：那表示什么意思？

广中：我想他的意思是指我要有用来啃硬骨头的牙齿——这个问题相当坚硬，所以你必须真正地咬进去。但是，他是一个友善的人，他一直鼓励我，并在一定程度上信任我。所以，我开始不断地写然后又重写，写了又重写，最终我解决了它。

但是我不知道它是否可以和 Andrew Wiles 在费马大定理上的工作相提并论，他的理论更加困难，而我的容易一些。奇点解消是手工解决的，它没有用到大的理论或者技巧，纯粹是靠手工解决的。Andrew Wiles 在他的证明里面融合了很多的东西，而我只是做了一些新的定义并且按部就班地做下去。

Notices：所以在成果进展当中您几乎是创造了一套自己的理论，而不是利用现存的理论。

广中：是的，实际上那是我的方式。

Notices：如果您必须得跟那些非数学家解释奇点解消，您会如何解释呢？

广中：奇点无处不在。没有奇点，你不能谈论形状。当你签名的时候，如果没有交叉、没有尖点，那它仅仅是一个花体字而已，不能称之为签名。很多现象很有趣，或者有时损失惨重，因为它们带有奇点。奇点可能是一个交叉或者突然改变方向的东西。世界上有很多类似的事物，这也是为什么这个世界是有趣的，否则，它将是完全平坦的。如果任何事情都是光滑的，那么就不会有小说和电影了。世界是有趣的就是因为这些奇点的存在。有时，人们会说奇点解消是一件不值得做的事情——它会让世界变得无趣！但是在技术上它是相当有用的，因为当你有了奇点的时候，变化的计算会变得很复杂。

如果我可以构造一个没有奇点的模型但是可以用于奇点本身的计算，是非常有用的。这就像一个放大镜。对于一个光滑的东西，你可以从远处观察然后可以认知它的形状，但是当有奇点的时候，你必须不断拉近距离。如果你有一面放大镜，你就可以看得更加清楚一些。奇点解消就像一面放大镜。实

际上，它比放大镜更好。

拿过山车举一个简单的例子。过山车轨道是没有奇点的 —— 如果它有，那就会出问题！但是如果你观察过山车轨道在地面上的投影，你会发觉有尖点和交叉。

如果你拿光滑物体的投影来解释奇点就会使计算变得容易得多，即：如果你在奇点上遇到了估值、微分或者其他什么问题，你可以拉回到光滑的物体上，这样计算就会变得容易得多。所以你拉到光滑物体上进行计算和分析，然后又拉回到原来的物体上看看它在原始几何上又意味着什么。

Notices：这真是一个漂亮的想法。

广中：是的，我想那是一个很好的主意。

Notices：但是要在普遍的意义下证明它应该很难吧。

广中：是的，我并没有被同步得到的许多等式组所吓倒。它是我感到非常自豪的成就。一般情况下，单个等式要比多个同步等式组容易处理得多。当你处理的是一个有固定变量数的问题的时候，大多数情况下的确是这样的。但是，当你想要对变量个数用归纳法证明任何变量个数情况下都成立的时候，此时把问题在初始情况下就写成是基于多个同步等式组的，则问题会变得容易一些。这听起来有点荒谬，但的确是对的。记得你是用基于 n 个或更少变量数的结果去证明 $n+1$ 个变量数的问题。$n+1$ 个变量的“单”多项式被写成是最后那个变量的各次方的线性组合，其中的系数则分别是用之前的 n 个变量表示的“复”多项式。所以你需要那些基于 n 个变量的多个同步等式组的结果。如果问题在初始的时候就写成多个同步不等式组的形式，则归纳法的证明在任何变量数的时候都会进行得很顺畅。这是一个很简单的发现，但是当它出现的时候，我就觉得整个证明已经在角落里等我了。那是在局部层次上唯一的问题，整体层次上的技巧则来源于 Grothendieck。

Notices：您可以解释一下奇点解消是如何和最近的一些成果产生联系的吗？比如，Shigefumi Mori 在极小模型问题上的成果。

广中：顺便说一下，Mori 是一个天才，而我不是。所以，那就是一个很大的差别！当我是京都大学的访问教授的时候，Mori 是那里的一位学生。我在京都上课，Mori 记笔记，那些在一本书里面发表过。他是相当惊人的。我的课已经很恐怖了，可是当我看到他笔记的时候，这些东西都一清二楚地在那里了！Mori 是一个探索者。他发现了一些新的东西，它们是其他人从来没有想象过的。

当维数大于 3 的时候，如果你想分辨那里有什么类型的流形或几何体，构造一个光滑的模型是有帮助的，因为在光滑的模型上你可以使用很多技巧。光滑就意味着局部问题不见了，而只剩下了整体问题。

这里说一下你如何去构造一个奇点。你可以取出某个流形，截取它的一部分，把它压缩成一个点，那就是一个奇点。所以，奇点本身就带有一个几何体。Stephen Hawking 说过，在黑洞里面有另外一个宇宙。奇点也是类似的：如果你真正究入其中，你会发现一个大宇宙。所以处理奇点时的一个问题是：奇点并不仅仅是一个点，而是有很多很多的东西在里面。要看到什么东西在它里面，你就得把它吹鼓了，放大它，并且让它是光滑的，然后你就可以看到全貌了。那就是奇点解消。Mori 做的东西就是他通过压扁某些东西来构造一个奇点。

Notices：所以他从一个光滑的模型开始，然后构造了一个奇点。

广中：是的，一个性质很好的奇点。那是他在三十多岁时做的成果。它是全新的。要将几何体分类，对每一类都构造一个极小模型，然后，该类中的其他对象就可以从这个极小模型中得到。Zariski 有一个二维情况下的极小模型理论。当然，意大利人已经有了极小模型理论，但是 Zariski 使它变得严格了。那里的极小模型是光滑的——没有奇点，那是最好的极小模型。但是，如果在三维情况下你还要保留光滑性的话，你就不可能得到极小模型。Mori 说：“那好，如果我们允许一个小的、性质良好的奇点，那么我们可以得到极小模型。”这是完全没有预料到的。我们没有预料到会有这样子的极小模型存在。我知道对于三维或更高的情况下是不存在光滑的极小模型的，所以当他在做这个工作的时候，我想他是在做错误的东西：它并不存在，所以为什么他还在寻找？但是他却说：“不，如果你允许那些被我们完全理解了的奇点，那么极小模型是存在的，并且所有其他的东西都可以从这里面得到。”

从美国回到日本

Notices：当您在哈佛期间，您起先在那儿待了一段时间，同时在京都也待了一部分时间。

广中：是的。离开大约有 20 年之后重返祖国，我遇到了一些困难，至少在起初的几年里面。举例来说，那是在我担任哈佛大学数学系系主任的时候。打一个比方，我们讨论一个新的任命，每个人都有不同的意见。一个人也许会强烈推荐某人，而那个人又会推荐另外一个人，因此我们可以讨论一下。但是在日本就不一样了。如果你提出一个建议，没有人会说些什么。

Notices：没有人会反对它吗？

广中：没有。在日本就是这样的。设想 A 教授推荐年轻的 B 博士。实际上他是推荐 B 博士的：都已经把这个推荐写在书面上了。他现在为什么要坚持这个呢？他想，“让其他人讨论一下吧”。于是 A 教授赞赏了一下 C 教授的推荐。如果我认为这是真的话，那么我就错了，A 教授肯定会在会后发飙的。

所以，我必须认真去听并且意识到他其实是想使自己的推荐得到支持的。

日本人会坚持于他自己的推荐或者需求，但是他并不表达出来。因为如果他表达出来并且事实的进展并非如此，那么他会觉得有些蒙羞或者丢脸。所以，你必须设法不要让他丢脸并且要去猜测他真正但并不直接的需求。

Notices：所以当您第一次返回日本的时候不得不去考虑如何面对这个。

广中：我不能忍受它，我太习惯于美国人的那套了！在起初的两年左右时间里面，我招来了不少敌意，这是完全没有预料到的。但是现在我习惯了。提醒一下，我说的都是几十年前并且是我们老一辈的情况，日本年青一代已经非常美国化或者全球化了，甚至都超过我了，虽然我在国外生活的时间比他们当中大部分人都长多了。

Notices：是否也存在一个做数学的日本方式？

广中：那就很难说了。数学是一门自然科学，但是它也依赖于人的个性。的确你可以在会议上面看到人们表现的不同点。如果只有日本数学家参加，他们往往不会为自己的想法做宣传而是去称赞别人的想法——并且相当多的情况下他们根本就不懂！你必须习惯于这类事情。

的确，有一种日本人的文化特性在影响他们做数学的方式而不是做数学的成果。从某种意义上来说，跟俄罗斯方式类似。举例来说，Kyoshi Oka 从京都大学毕业，并且之后的十年左右时间里面没有发表任何文章，所以他不可能在好的大学里面找到工作。最后，他谋职于奈良女子学院。他有点疯了，其实他是很有独创性的。我在 Mikio Sato 身上也看到了相同的影子，并且是相当有创造力，Kunihiko Kodaira 也有一定程度的类似。Kodaira 去了美国，所以他变得更加西方化了，即便如此仍本性难改。对于日本的文化是应该做点什么事情了。这是一种过分单纯化的表述，但是在西方世界里面你的确经常在尝试表达自己，以某种方式炫耀自己，过分表现自己，并且通过这样的方式你会获得更多的动机和动力。并且由于这些，你在多产和独创性方面都会达到一个更高的水平。那是一种方式，但是日本方式并不如此，至少在传统意义上。你不能炫耀，你等别人来认可你。即便如此，保持谦虚仍然被认为是一种良好的、值得尊敬的品行。所以十年没有写任何文章就什么都不是了。数学家应该相信自己在做的东西，无需炫耀。

Notices：您组建了一个名叫日本数学科学协会的组织，部分用以支持为年青一代开展的夏季研讨班，这些活动到目前为止已经开展了 20 多年，现在它们的情况怎么样？

广中：有两个研讨班：一个是美日大学生研讨班，另外一个仅仅是面对日本高中生的。从我作为一个数学家的经历来看，我认为真正感兴趣的是讨论想法，并不是组织良好的讲课，在那里你认真听讲并且记笔记。当年轻人

想要有创造力的生命，他们应该学会喜欢讨论，即便是这些想法并没有被良好的公式化或者在不断改变中。事实上，想法的更新是创造力活动当中最有兴趣并且最开心的环节之一。这就是那些研讨班的运行方式。

我创办了这个组织来支持研讨班。在运行了 20 年之后，我说："我老了，那我要退下来了。"然后有校友开始组织这些研讨班，并且延续了下来。目前我在两个地方教授年轻人，采用一种很休闲的方式。在一所音艺美校里，我每星期上一次课。同时还在教一班一年级学生，一个月只有两天，但是却很有趣。

我曾说过小孩子像黑猩猩，还有人对我的说法大为恼火。但是黑猩猩是很让人惊讶的。京都大学有一个实验室是研究黑猩猩的，我在那里观察过。他们很有直觉，对所有东西都能马上做出判断。打个比方，黑猩猩可以被训练出一种这样的本领，当一个人走进来，它按下一个按钮表示认人，如果他认对了，他可以得到奖赏，比如说香蕉。黑猩猩不假思索地就按下按钮，即便是他只看到半张脸。但是如果你以某种方式测试一下黑猩猩为什么会做出这样或那样的决定，他就会恼羞成怒！孩子们也是如此。举例来说，现在我在教授一年级学生欧拉公式，是关于多边形点、边和面的一种关联。他们相当有直觉并且可以猜出答案来。

当一个人在处事的时候，他必须要有一些知识，否则他会犯下可怕的错误。但是同时，光有知识并不能得到任何新的东西。你必须要有直觉并且潜意识地利用直觉。如何在孩子们不丧失直觉力量的情况下给予他们知识，是一个有趣的问题。如果你仅仅是持续地给他们灌输知识，大多数人都会失去他们的直觉并且开始依赖于知识本身。在知识和直觉之间的这种平衡是很有趣的。

我还在持续做点数学，它让我在相当愉快的方式下消磨时间。当你年轻的时候，你会想大有所为或者得到你所研究领域的认可。但是我现在已经没有这样的动力了，而动力变得更加内在了。我想去享受创造性的思维。当你到了一定的年纪以后，你会开始找寻如何跟岁月打好交道。而在年轻的时候，你有时并不知道用时间来做什么。我现在做数学还是跟以前二三十岁时那样严肃，但是却以一种更加享受的方式。我不会担心如果我没在两个月后发表某些东西，别人会抢先发表。我不再有这样的问题。我想做那些没有人会想到的东西！并且我会乐此不疲。

为什么要做数学?

Notices：问一个天真的问题：您为什么要做数学?

广 中：当我还年幼的时候，对于我为什么要做数学有过一些想法。但是后

来想法改变了，并且从某时开始我再也没有想过它。它仅仅是我的职业而已。但是那时之后，在天命之年我回到日本给京都的一所小学做一次讲座。老师安排了一个我和孩子们的答问环节，我告诉他们可以问我任何东西。有一个小孩子就问："您为什么要做数学？"我已经记不清楚具体说了些什么，仅仅是编造了一些答案：它是一门有趣的学问，它富有挑战性，诸如此类的回答。但是当我离开这所学校，我开始真正对我为什么在做数学而感到疑惑！我想我知道为什么，每当有人问起这个问题，我就开始真正思考它。

我积聚任何和数字有关的东西。举例来说，我有超过 10000 张关于花和叶子的照片，我喜欢无谓地数数并且把它们拿来比较。我很高兴成为一个数学家，因为我可以在事物里面看到来自数学的乐趣。

Notices：您做数学的欲望是否来自于对事物的好奇心？

广中：是的。首先，数字是有趣的。我认为数论实际上是数学最重要的分支。它也是非常困难的。如果你真正去思考加法和乘法之间的关联，你会发现它是相当奇怪的。打个比方，5 是一个素数，但是如果你加上 1，它立即就变成 6，是 2 和 3 相乘的结果——出现了两个不同的数。对此大惊小怪似乎看起来很傻，但是如果你真正去思考为什么乘法会以这种奇怪的方式出现，其实它和数论里面的一些问题紧密相关，特别是黎曼猜想、素数的分布。那是相当困难的，那个问题已经悬而未决很多年了，但是还没有人朝最终的解决迈出有实质性的一步。

Notices：您有想过试图去攻克它吗？

广中：没有，我还没有实力去做它！虽然如此，它给予了我一种享受生活的方式。我想我可以比非数学家享受到更多，仅仅通过一种数字、加法和乘法的观点来看待自然。

Notices：那真是一种美学的感受。

广中：是的，它是一种天然的人类兴趣，并且是一种使生活变得有趣和愉快的方式。

Notices：您认为数学是数学家们发现的一种独自存在的东西，还是人类发明出来的？

广中：我不是一位历史学家，但是，粗略地来说，从第二次世界大战直到 20 世纪六七十年代，数学是真正靠自己在发展的。它有一种很强的动力去通过内部的动机和内部的兴趣去发展自己。举个例子，Grothendieck 就是活在这种原则下的人。在五六十年代，数学家们看不起那些谈论现实应用的人。如果一个数学家开始讨论应用了，我们就会说，"哦，他不会成为一名数学家了，他会成为一名工程师"，即使他正在做重要的东西。20 世纪初叶是一个独特的时期，是数学史上光辉的一页，数学出现了欣欣向荣的局面——至少

我们认为它是欣欣向荣的！而且是纯粹且独立于社会的。这带来了很大的进步，数学也产生了显著的变化。甚至那时我记得有人说数学家在做“抽象的废物”或“纯粹的废物”。但是数学家们并不是这么认为的，他们是在做纯正的数学。如果有人问道：“你的成果是如何帮助社会或者生产出一些你可以用的东西的？”可以确定那时的数学家肯定会说：“那真是一个极度愚蠢的问题！一个低级的问题！”

庞加莱从纯数学的角度来看是一个很好的数学家。但是就在当时，他强调数学是从人们试图去理解物理现象中汲取营养的。基础物理学的飞速发展大大地改变了人们对世界的看法并且给予了数学强大的推动力。看看爱因斯坦的成果或者量子力学，数学在那里非常有用。但是物理也随之改变了。当今，物理也从纯物理变得更加应用了。如果你看看诺贝尔物理学奖得主，举例来说，在 20 世纪中叶的时候，很多都很应用——他们在做电力、电子、化学应用、超导和诸如此类的东西。我记得在 20 世纪初期的时候，至少在我的朋友和老师当中，有很多物理学家对理论和基础物理是感兴趣的。但是这发生了很大的变化。我想那也会对数学产生影响。

Notices：您看那些菲尔兹奖获得者，他们都还是和以前做得一样纯吧。

广中：对呀！但是我认为六七十年代是数学毫无疑问有理由存在的巅峰时期。

Notices：您认为数学有核心吗？是否有可靠且非常基本的理念区分了核心和边上那些不太基本的东西？

广中：我认为任何和数字联系紧密的理论都是数学家们完美的东西。它是数学行为的理想部分。

Notices：数论是数学的皇后吧。

广中：皇后还不够好！有些时候我们并没有这么好的皇后！但是不管怎么说，它是被人们看成是数学的终极目标的一种东西。几何是很好玩的——你可以改变它的形状或者拉伸或者变形或者加上一些柄，诸如此类。你可以拿它来玩。不管它是否有意义或者重要，抛开这些条款，它终究是有趣的。然后有一些人在动态和分析上做学问。我的一个疯狂的想法是，分析学家就像日本武士。他们一刀下去——嘘！并且如果切得好，他们就可以扔掉一部分，然后他们可以找到一个很好的公式！

Notices：他们切掉了不需要的部分。

广中：是的。在这些门类各异的数学的底层，都有一个数学永恒的问题或者永恒的使命，那就是无限。数学家们做的东西有意识或者无意识地都是对无限的一种有限化。把无限的东西放到计算机里面是很重要的。不管计算机有多好、速度有多快，它是不能计算无限的东西的。但是数学家们有一件事

情要做：去表述出一个模型。这个模型也许并不与原始的现象完全吻合，但是它可以帮助你理解它。并且这个模型是有限的：你可以把它放到计算机里面，并且计算机可以算出准确的答案，至少对于这个模型来说。所以，数学家们赋予无限一个有限的形状或者一个有限可算且可理解的模式。

这是人类本性中相当有趣的一种特征。以我的角度来想，人类之所以有别于其他的动物是由于人类有一种无限的观念。他们从来不曾看到无限，他们从来不曾无限地活着，即便是宇宙也可能不是永久地存在的。但是人类的生存离不开无限的观念。

Notices：您认为离不开吗？

广中：是的。那是人们创造宗教的理由。宗教里面说世界比你毕生能达到的距离要长得多，宇宙也比这个要大得多。所以你会感觉好一些。无限就像一种信仰。如果你对无限和永恒有一种信仰，你会觉得开心一些。

Notices：有一些让人对它感到满意的事物。它是一种完善世界的东西。

广中：对呀。我不认为其他的动物可以做到。我认为很多其他动物不能参与的人类文化和智力活动都与无限的特征有一些联系。那是一方面。但是同时，当你要去理解某些东西或者实际上可以计算并且投入到实际生产中去的时候，一切都是有限的。如果它是无限的，那么你做不了任何事情。人们不能操作、制造或者安排无限的东西。人类有两只手：一只是在无限里，另外一只在有限的现实世界里面。我想数学家们真正的任务就是采取什么办法把这两只手牵到一起来。

编者按：本文原载于美国数学会新闻月刊 (*Notices of AMS*, Sep. 2005)。

名家文选

漫谈微分几何

丘成桐

编者按：本文根据 1991 年 12 月 7 日丘成桐先生在台湾东海大学的演讲整理而成。



今天很高兴能够在各位面前讲讲我做学问的经验，可以供大家参考一下。我讲“如何学好微分几何”的题目，主要是想跟大家讲讲有关于从前我做学问的态度，因为我是做几何的，所以我就讲做微分几何。很明显，大部分的同学不会选几何，不过没有关系，其实就是讲讲我做学问的态度。

首先，讲讲我从前的一些经验。我从前在香港长大，在香港念中学、大学，然后到美国念研究所，所以至少在前一半跟大家的经验应该差不了太远，不过是时代有点不同。我在多年前念数学，你们现在念数学，看法上已经有许多不相同，事实上我也不太了解你们现在的想法。不过基本上，我们都是在中国文化的熏陶下成长的，所以我想仍有一部分共同的地方。基本上我们是要讲怎么做科学研究，也就是纯科学的研究，我们要看的是我们的志向是怎样的。假如我们想做一个好的科学家，当然我讲的是怎么做一个好的数学家。先说我自己的经验，我从前在香港培正中学念中学的时候，就开始对数学有兴趣。当然还有一些其他的课程，我对数学有兴趣，一方面是受到我家庭的影响，我父亲是研究哲学的，所以对于念数学一直都相当鼓励，到了中学以后，我父亲去世了。不过也因此对于自然科学有很浓厚的兴趣。另一方面受老师的影响也很大。我想很重要的是，当我们开始要做一个学问，尤其是你真的要做一个出色的科学家，跟你的兴趣和你一开始所立下的志向有很大的关系。就是说，开始的时候你期望能够做到什么。假如说开始的时候你

根本不想做一个好的科学家，那么你就永远也不可能做一个好的科学家。从前有位大学老师跟我讲说："假如你不买马票，你永远也中不了。"倒不是说我鼓励你们去买马票，是说假如你不准备做好的科学家，就永远也做不了一个好的科学家。不过是不是讲，你想做一个好的科学家，你就可以做个好的科学家呢？当然不是，你还要有很多其他的因素在里面，我想第一点是要先确定做人的目标。

我在国外二十多年了，也教了不少的学生，有些在世界上算是很出名，但有些不是太行。从这方面来讲，通过比较好的学生和不好的学生，我可以晓得不同的经验。我想好的学生大部分一开始就决定他要做到什么程度的科学家，从很早就可以看得出来，因为有了志向以后，才晓得怎么去用功、怎么去花时间在上面。这看起来倒是老生常谈，因为你从小学、中学到大学，大概很多老师都跟你讲同样的意见，可能你听多了都觉得没有什么意思，但是事实上这是成功的第一个因素。我的一位老师跟我讲，你要决定以后你想做什么，讲明了，不是为名就是为利。当时我很惊讶，老师为什么讲这一句话。我们不能否定大部分的想法不是为名就是为利，同时这个想法也推动了不少科学的研究。不过我们也晓得，单是为名为利不可能将科学达到最高峰的研究，我们一定要对这个科学有浓厚的兴趣。我们应当晓得，做科学，我们有一个很纯正的想法，就是对真理的追寻，在真理的背后有一个很漂亮的境界在里面，我们到了一个境界以后，对我们追求学问的人来讲，是无法抗拒的，就算是没有名没有利，我们也希望能够将这个真理搞清楚。举例来讲，如果你喜欢下棋的话，有时你会晓得下到一半的时候，结局会是怎样，你非为名也非为利，当然可以说你是为了好胜，但是有时候你总是想追求，想晓得怎么解决这个问题。在科学上来讲我们要追求的是比这个高的境界。我为什么讲为名为利这个事实呢？举例来讲，我们这几年在哈佛大学里教了几个在大学里念数学念得很好的学生，可是到了毕业的时候，我晓得他们明明对数学有很大的兴趣，但是他们选取了完全不同的途径，他们有些人宁愿选择做生意或是到银行里面做事。我并不反对你们去做生意、赚大钱，我失望的缘故是因为这些学生明明是对做学问兴趣特别大，但是他们没有办法去抗拒赚钱的引诱而放弃了继续做学问的前途，有些人甚至过了几年赚了钱，又想重新再做学问，但问题是无论你资质有多好，一般来讲你将做学问的机会放弃以后，再想重新做起将会遇到许多困难。并不是说不可能，也曾有这种情形发生过，但是真正能够达到的情形，几乎是绝无仅有，做学问是不能中断的。我遇见过很多朋友，有些甚至是很有名的数学家，他们有些人会讲我现在一方面做行政的工作，一方面可以做学问，可是事实上，这是没有办法可以达到两者兼顾的情形。我们晓得做学问几乎是全心全意的工作，当对证明追寻的时候，很难说受到其他外界的打扰，仍能够达到很高的成功的。以我的经验来讲，在

想问题的时候，晚上睡觉也在想这个问题，躺在床上也在想，早上起床第一件事就是想这个问题。我并不是讲你们也要这样子，我是希望你们在遇到一个问题要解决的时候，你要全力以赴，不可能在中间慢慢想一点而在其他方面也可以花点工夫，这样精神不集中的态度是不可能做好学问的。我想对大家做个建议，假如你想做个真正的好科学家的话，就不能够再往回走，假如你想做生意，那干脆一开始就不要想这个问题。所以这是第一点，立志很重要。

第二点我要讲的，我在国外多年，遇见过许多很出名的数学家，有名的物理学家我也见过许多。但我认为并没有一个是真正的像一般报纸上所讲的天才，我所亲身认识的大科学家，都是经过很大的努力，才能够达到他所达到的成就。我的学生问我："为什么你做得比我好?"我说很简单，我比你用功。我在办公室或家里，天天在想问题，你们在外面玩，而我花了工夫在解决想了很久的问题，我总比你不想、不花时间成就大一点。你可能去听某个大科学家或大数学家演讲，你会觉得漂亮得不得了，怎么一个人能够讲得这么好！这个人是个天才！可是你有没有想到，他在后面准备花了多少时间想这个问题？大概你们听过最出名的科学家费曼，费曼物理漂亮得不得了，所有出名的物理学家都这么讲，去听的人不是学生，都是老师或物理学家。费曼在准备费曼物理的时候是什么事都不做，就只有脑子在花工夫，整天在想这个问题，跟许多学生不停地在谈这个问题。费曼是个有名的天才，可是他准备这个研究也花了许多不同的工夫。我想很多出名的科学家在表现出不同的时候，你会觉得他是天才，事实上他用在后面的工夫都是很多的。

有许多很聪明很厉害的人可能是研究生甚至是教授，往往你给他一个问题，他可以很快给你一个答案，同时是很不错的一个答案。可是很多这样出色的学生或是教授，过了很久以后，你总会觉得他没有做出很好的成绩出来。问题是，你解决的问题太容易了；没有再花很多精力去考虑这个问题。尤其我们中国人最缺乏的，就是在做中学生或是大学生的时候，没有将一个问题从头到尾仔细考虑清楚，并没有真正地全部了解，这是个很重要的问题。从一个很小的问题，我们可以引发很多不同而且有意思的问题。思考要自己训练，不单是在联考或在大学的时候，老师出个题目，你考了一百分就完了，假如这样的话，你很容易就满足你自己，你不觉得问题有什么意思。往往出名的研究是在很平凡的问题里面，不停地思考所找出来的，很多人因为很快将问题解决了，便不愿再想下去，所以不能够再启发新的东西。科学的研究，不是解决人家已经晓得的问题。当一个科学家问一个好的问题的时候，即是成功的一半。因为科学的推动是从不断地找寻新的问题、新的方向出来的，解决从前的问题虽是个重要的推动方向，可是我们还要找出新的方向，而不单是解决从前的问题。我们知道在物理上解决问题的时候，往往大的或出名的公式是将前面固定的理论推翻，而找出新的路子。为什么大数学家或大物理

学家能够做到这个地步呢？因为他们不断地问问题。有时候在一般人来讲很明显的问题，在出名的科学家看起来，就不见得很明显。为什么不明显呢？因为我们有不同层次的问题要一路考虑下去。问问题的能力是一个很重要的训练，并不是花很多工夫就可做到，我们的小学、中学或大学里都没有很好地做到这一点，我想从小应该做到这一点的。

现在我们来看数学跟其他物理、化学或生物等实验科学有哪些不同？物理或化学等科学是从一般实验、现象界所找的题目，最后再经过实验的证实，才能算是个成功的理论。理论物理学家可以发展很多不同漂亮的理论，但最后假如不能够在实验里做出来的话，对物理学家来讲就是一篇废话。数学家有个好处。就是说，我们做的学问，一方面大部分是从一般的科学里面产生的，一方面可以当作文学作品来欣赏。我们的取材多彩多姿，一方面是比较基本的，从自然界或物理上的基本粒子、广义相对论、重力场去拿出很多基本的大自然的问题。这方面对近代几何学上的影响很大。另一方面可从比较基本的理论里派生出来。所谓不基本，并不是说不重要。我们要了解到我们有些问题是从工业界来的，譬如说做飞机、做螺丝，甚至做流体变动的问题，都是可产生许多有趣的几何问题或是数学问题。例如说机械人手怎么去拿东西？这都可以看作是基本的几何问题，物理学家不一定有兴趣，可是数学家却有很大的兴趣。另外我们也可以对与实际问题不相近的问题产生兴趣，对一个图画得漂不漂亮，我们也可以在数学上研究。几何在数学上的取材有三个不同方向：第一是从基本自然界里产生的问题。从基本粒子、重力场到电磁波产生的种种重要几何问题，从表面上你看不出来为什么它跟几何有关，但事实上近代物理将很多这种基本场论的问题变成几何问题，对微分几何来讲有很大的贡献。第二是如刚才所讲，工业界与古典力学产生出了很多很重要的几何问题。第三就是纯粹从美的观点来找问题。举例来讲，从数论里面找了许多很漂亮的问题，尤其是近十或二十年来，大部分重要的数论问题大多是用几何的方法来解决的，这是几何在数学上三个重要的取材方向。

我为什么讲取材的问题呢？很多中学生或大学生在念几何或是某些数学课程的时候，认为我们念哪个学科就念哪个学科就够了，而不要念其他的学问，这是个很错误的观念。因为数学里面每一门的学问都是密切关联的，不单是数学，其实所有的理论科学中间都有很密切的关系。例如我们刚刚所讲的，高能物理与数学的关系，或是化学甚至生物都跟数学有很大的关系，所以我想怎么学几何呢？第一点是当你决定好要做一个好的几何学家时，你一定要广泛地学不同的学问，基础要比较广，如微分方程、代数、物理学以及其他学科，至少在心理上有个准备，就是说这些学科将来是对你有帮助的。你听起来会觉得这是很困难的事情，你不可能学会这么多种不同的学问。这主要的分别就是你要有一个层次，你的专科是哪一方面，就要多学一点，但不

可忘掉其他的学科。有时在某个意义下，我们可以很惊讶地看到同一个学问、同一个命题，在两个不同的学科里面，可以以不同的方法出现，就是说以不同的方法证明。我想主要的原因是根本上这两个学科的分别并不是很大。在几十年前有个出名的物理学家说数学有不可思议的力量。为什么数学能够在物理上有这么大的影响呢？因为从物理学家的看法，数学家只是在玩一些简单的符号，纯粹是在家里想一些自己的问题，与自然界的关系好像不大，其实这是个错误的想法。我们数学家研究的问题是很具体的，只是有不同的层次，所以有点不同而已。举例来说，我们研究微分几何上一个最简单的图形——圆球，这圆球可以说是一个抽象的观念，我们也可以说它是自然界很具体的一部分。也就是说我们将所研究的圆球视为自然界的一部分，其实跟物理的现象差不了太远的。尤其在现代的高能物理里，我们研究基本粒子，尤其到了量子力学的观念以后，因为能量已经到了很高的地步，有很多根本没有办法做实验，所以基本上也是在家里、课堂里或办公室里用纸笔来算，这跟数学家想象的差不了太远。

假如物理学家可这么做，表示数学家也能够坐在家里而对自然界达到某种程度的了解。为什么我要讲这些呢？这些与微分几何有什么关系呢？我要讲的是你在选题的时候，我们虽然有个自由度让选题与自然界无关，但是我们也有一个限度在里面，假如我们选的问题与现实相差太远，最后我们的命题会被淘汰掉。在历史上有很多不同的研究，过了十年、二十年后就完全被淘汰了。你看现在的图书馆里面有许多的文章，不过再过个十年八年以后，我想大部分的文章是会被淘汰掉的，根本在整个数学历史上起不了任何作用。这是因为很多的文章实在没有解决问题，其次是对我们研究的对象没有产生任何效果。

所以虽然我们数学界不用时间来做证明，可是我们有某种程度的测试。一般来讲，证得很好的数学，二十年或五十年内都可以看到它在现实里有所作用。我们晓得在过去的二十年里，从前许多不重要的问题，在今日的工程上发生了很大的影响。举例来讲，从前在数论里对于质数的搜查这个问题，完全是一个无聊的命题。就是说一个很大的数，你怎么将它因子分解得很快。近十多年来，在国防科学上这问题变成一个重要的命题，有许多国防科学家在做这方面的研究，所以说数学上的选题很重要。为什么因子分解很重要呢？表面上看来跟真正的用途好像没有什么关联，可是它是一个很自然的问题，一个很大的整数它怎么分解，表面上并不重要，但可以帮助我们了解质数的分布情形，所以我说选题是一个很重要的问题。我记得从前我们在做大学生的时候，花了很多工夫去念一些文章与参考书，有些对数学来讲是很无意义的，可是反过来说因为花了很多工夫，所以可以了解到有些问题比较重要，有些问题比较不重要，所以花的工夫并没有白费。

其次我们讲做一个学生应该持有怎样一个看法。对于做数学或做微分几何来讲，我觉得研究的气氛很要紧，尤其在中国的环境里，好像是不太容易培养出这种气氛来。假如你旁边的朋友或同学跟你谈的都是其他的问题，譬如说股票涨了或跌了或其他问题，久而久之，你大概对于做学问也没有很大的兴趣，所以培养做学问的态度与你交的朋友、跟的老师有很大关系。如果你们时常讨论学术上的问题，你就不会觉得自己很孤单，能够激励你对数学产生更大的兴趣。假如你自暴自弃，就是说你认为自己不能够在数学上做研究，不能够在数学上成功的话，你永远也达不到，而且同时也影响到你旁边的朋友，使得大家都不能向前走。我们晓得许多出名的数学家甚至在牢里也可以写一些出名的文章，倒不是你永远关在牢里就能做好的文章，是说人在最困难的时候也可以做研究。除了气氛很重要外，你也需要得到先进的支持，从前我们念中学的时候，念了很多关于做学问的方法，从前觉得很好笑，以后念书念得多了以后就觉得这些很重要，事实上这些是很重要的经验。有句话说“学而不思则罔，思而不学则殆”，你单是学而不想是不行的，你单是想而不学也是不行的，这两句话看起来很简单，其实就是怎么分配你的学习和思考，这是一个很微妙很重要的问题。一个人无论你多用功多天才，假如不去体验去学习前人做过的东西，是不可能做好的。这道理很简单，一个人的智能有限，我们不可能与前面十年、五年所有人做过的加起来的智能相比，我们要靠前人的经验，要靠他们的启发，才能够向前迈进，虽然有人自夸地讲比他们加起来都行，我不相信这种情形，也没见过这种情形。所以出名的贡献如爱因斯坦、牛顿的贡献，也是在前人的成果方面再向前走一大步或一小步。所以学是一定要的，可是如果你学过这个东西而不去思考，不去消化，就算你可以考第一，考一百分，但是你不想是绝对没用的。我们看过很多出名的天才，十二岁就拿到学士学位，甚至拿了很高分，可是我们往往看不到他以后的成就。为什么很多所谓的天才在以后的科学发展里没有任何的贡献？这是因为他们没有思考，没有思考在科学上完全不会引起任何的波澜、任何的贡献，对于整个科学完全没有好处。所以学了以后一定要思考，怎么分配你的学习跟思考就往往要有导师的帮忙或是同学的帮忙。所谓的帮忙并不是说老师跟你讲你应当这么做或应当怎么做，这样往往是没有很大效果的，所以我刚刚讲的气氛很重要。从人家用功的程度或是讲话的态度中得到启发，或是讲话的时候能够去听，追根出什么东西来，从而得到很大的帮助。从前我到伯克利去念研究所时，我花了很多工夫去听很多不同的科目，有些人觉得很奇怪，为什么我会去听那些课？我觉得这些课对我有好处，过了几十年后我还是觉得有好处。有些课在我去听的当时可能不懂，可是听了还是觉得有好处，因为一个人的脑袋的想法并不是那么简单的，有时候某些东西当时可能不懂，可是慢慢地就能领悟很多东西。我举例来讲，我做博士论文的时候，

我刚好要用到群论的东西，当时我问过许多专家，但是都不懂，我突然想到从前在某一课上听过一个有关这方面的论文，我忘了当时讲什么课，但我记得大概在哪里可以找这方面的文章，所以我花了 2 天的时间在图书馆，结果给我找到差不多是我想要的文章。假如当初不去听这门课的话，我完全没有这个机会，所以有时候听一门不懂的课，有很多不同的帮助，所以我跟很多研究生讲，你们去听课不一定要懂，你坐在那边总比不坐在那边好，你不坐在那边的话，你完全不可能知道有其他的方法。

我想最后还是你对整个学问有多大兴趣的问题，假如你对这个学问兴趣不大的话，你没办法长年累月地坐在图书馆，坐在办公室里，或是坐在一个课堂上听课，所以你一定要先决定你对这学问的兴趣有多大，当然做研究还有许多其他方面比较复杂的原因，以后有机会我们再讲下去。我想现在你们在大学的阶段，最要紧的是决定以后你要做什么东西，其他的可能就容易做到了。

关于学习数学

丘成桐

编者按：本文根据 1992 年 1 月丘成桐教授在清华大学（新竹）的演讲由赖鹏仁记录并整理而成。

从前我们的时代，念中学和大学的时候，能够挑的科目不是很多；现在比起从前有点大不同，可挑的比较多。如果是要赚大钱，你可以念工商管理，很多不同的科目，你可以赚很多的钱。其实对整个国家来讲，也需要能够管经济或其他方面的人才，赚钱没有什么不好。



丘成桐

所以对于国家，整个社会来讲，没有讲一定要念数学。其实要混口饭吃的学科很多，同时也可能比较容易点，所以念数学不要是混口饭吃就好了。就是讲你跳出这门课来看的时候，最好不要讲念数学就是为了混口饭吃或为什么东西。假如你不想念数学，就早点决定不要念数学，你真的要念数学的话，你就花工夫在这上面。

懂得越多，才知兴趣所在

我的结论就是假如你决定要念数学，挑选了数学以后，你就花全部工夫到数学上面去，希望对数学有兴趣，在数学里你可以得到很大的乐趣。同时这样决定了，对你以后的成就也会有很大的影响。

我觉得最不好的就是你对数学有兴趣，却为了赚钱就跑到其他科目，其实你也不见得赚得到钱。这是讲你的决心要下得很大，不要三心二意，“让我念念看，假如不行的话再转”，很多人是这个样子，尤其是中国学生，进了大

学再试试看嘛，这儿不行就转转，最后搞得两边都不如愿，很多人是这个样子，为什么一定要这样?

这是决心的问题，一个很重要的决定，就是你进数学系时，你预计要做什么事情，对我自己来讲，我很早就下了决心我要念数学，所以从来没有想过要转其他的或是为了其他事情不念数学。

到了你决定以后，你要懂得数学有很多不同门，就是分支，你在大学，对每一门分支的了解可能差得远。就是讲你很难在大学里就决定对数学里哪一门兴趣大一点。

其实兴趣和你懂得的学问是有关系的，因为你可能对某件东西有兴趣，不过你不晓得它时，你就不可能对它有兴趣。譬如你去爬山，你爬过了小山才看得到大山，你还没有看到后面的山以前，就不可能对后面的山有兴趣，所以所谓兴趣和你了解多少是一种非线性的关联。

这个兴趣和你当时的地理环境有关系，跟当时的时间也很有关系，就是和当时的时空关联很大。譬如来讲，因为你刚好在台湾，你旁边的教授若是单做那一行的，你对其他行就不见得晓得。就整个世界来讲，虽然你刚好走到某个地方，也许时间刚好不对，大部分数学家对这一方面兴趣不大，对其他问题兴趣大一点，并不表示其他问题就不重要。所以数学家对数学的了解，跟时空有关，兴趣也会跟这个有关。

我觉得一个年轻的学生，首先要开放心胸，就是讲你要晓得，你念的学科，有很多时候跟其他的学科关系很大，不要以为我念的这门学科跟其他的完全无关，其他的就不念了。例如很多学生，说对某些文学课有兴趣，凡跟这门文学没有关系的，就不再想去念它。比如讲我对泛函分析有兴趣，跟泛函分析关系不大的，就算有一点关系我也不想去看，这是一个错误的观念。其实泛函分析跟偏微分方程及很多不同的理论有关。大学是一个通才教育，就算你单对代数有兴趣，除了代数要懂以外，对微积分也要懂，其实微积分对代数也有很大的影响。所以基本上大学所能提供的课程，我觉得你们年轻人都应该去学，不单要学，而且要尽量学好。

基础打好，对研究帮助很大

很难想象有什么大学课程在研究院是不重要的，你在大学里念的每一门课，和以后研究都有很大的关系，我想关系是绝对有的，就算在研究院里一二年的课，我想对你以后的研究也是有很大的好处的，所以应该尽量将基础打好。其实到你真的做研究时，你会发现你需要很多工具，很不幸，很多东西，你在念大学、念研究院时没有好好地念好。到了念博士那个时候，你常常要赶写论文什么的，你发现工具已不够，要花很多时间去念，工具不够又不

想去念，你就很麻烦。毕业拿个博士以后，你又有很多不同的其他压力，中国台湾比较少，至少在美国是很大的，你要尽量发表文章，一下子没有那么多时间将那门工具重新再念过。所以念大学跟研究院那两年的时候，要尽量将所有基本工具全部念懂，我想这是很有必要的。

譬如来讲，我很多朋友是代数几何做得很好，可是需要用到分析做工具时，他们就觉得很怕，反过来讲，分析念得很好，可是需要代数时就很怕。不过我觉得一个好的数学家，至少要懂得两门以上的数学分支。当题目来的时候不会恐惧，才能很活跃地做一个好研究。

一门学科你要念到什么地步？你自己要晓得。就是讲你遇到一个研究课题的时候，你虽然不见得能够解决掉，至少你要晓得你可以坐下来对这个问题产生一些想法，同时可以找这方面的文献，将它基本的术语弄懂。晓得怎么去攻进这个问题，然后开始解这个问题。这个问题不一定能够解决，不过至少你不觉得不着边际，晓得怎么去对付这个问题。要做到这个地步，其实是要懂很多东西，要经过相当久的训练才能够达到这个地步。

因为我们能力有限，一个人不可能每门都懂，不是我们不想，可是当一个题目来的时候，我们往往会产生很多不同的相关问题，这个题目并不见得正好是我们熟悉的领域，我们希望能够找文献或至少找个适当的做研究的人，问他们碰到这个问题时要怎么对付。

所以你们在大学或研究院要懂得怎么发问，这是个很重要的基本功训练。发问的训练，从小的方面来讲就是问老师或同学，从大的来讲，就是自己做一些比较起来还没有人问过的问题。一个好的数学家跟差的数学家，往往决定于你问的问题有没有意思，是不是重要的问题。你要做到后来成为一个专家的时候，才晓得你问的问题有没有意思。

不过对你们年轻人来讲，问一些你自己认为有意思的问题是一个很好的训练，你问的问题可能是专家们熟知的或是人家已经解决了，其实也没有什么关系，问问题是一个很重要的训练，并不容易，不过你要尽量在这方面自己训练自己。

我想你们大学念到一年班、二年班时，应当通过跟同学讨论来训练自我，也要通过向老师问问题来训练自己。

我不晓得你们清华的同学间，彼此讨论的情况怎么样？我觉得这是很重要的。无论是懂的问不懂的人，或是不懂的问懂的人，这两方面都有很大的好处。

你自己不懂的问题去问很懂的人，当然对你自己有好处。反过来讲，你跟不懂的人解释自己很懂的东西，也是一个很好的训练。因为往往我们认为很懂的东西，在向别人解释时，才发现自己其实不懂。向对方解释数学命题

时（一般来讲，你大学读到的是比较已知的命题），往往会发现本来以为对的解释原来是错的。所以无论是你自己觉得自己学问不大好的，或是自己学问做得很好的，我觉得互相讨论对双方都有好处。

高年级同学比较知道，在看课外书或是参考书时，前面的第一章，觉得很容易，第二章也很容易，到第三章可能模糊，到第四章时好像很形式化，并不懂什么意思。为什么会产生这种现象呢？这很简单，因为第一章比较浅一点，你是真的看懂了，第二章其实你不懂，你就跳过去了。这个证明没看懂，但自以为，大概这样就对了。越看越多时，前面知识越累积向后面，错就越来越多，到了最后时，根本就没办法控制。

假如你看一本书时，你对一个人讲，甚至对一个黑板讲也可以。对其他同学讲，不单有意思，而且同学往往会问你些问题，让你晓得你什么地方是没有搞清楚的，经过整个过程以后，你会晓得什么地方你懂，什么地方你不懂。所以我们往往鼓励学生一定要教书。

我们做研究的人也一样，一定要教书，不能够单单做研究就算了，不用教书。教书的好处跟刚才讲的一样，你在讲自己的研究的时候，或者在讲一个命题时，你往往一路讲一路发觉自己有什么不足的地方。你不讲自己的研究，你发觉你好像很模糊搞不清楚；当你向别人讲时，一点一滴讲出来，你就晓得自己在哪方面不足，中间的联系，并不是你想象的那么完善。常常因为我们发觉研究不够完善，所以我们还要继续向前做研究。假如研究都是充足的话就可以告一段落了。

所以同学跟同学间，同学跟老师间的讨论，我想都是很重要的。

任何一门科学，包括数学，都不能说已经发展得很完善了，在每一个层次上我们都可以问一些很重要的问题。基本上数学里即使很简单的学问，你也可以问出很重要的问题，这些问题你并不一定能够解决，你可以跟老师或者跟同学讨论。

不过你在问问题时，可以将自己的整个思想、思考搞清楚，这是一个很重要的训练，我很鼓励你们尽量去问一些问题。

我觉得很得意的，就是我从很早的时候，就常问一些数学问题。我在中学时开始问一些问题，自己看有没有办法解决。

其中有一个问题，我考虑了一年：给一个三角形多少数据，就可以完全决定一个三角形呢？普通给定三个数据，例如一条边两个角 (ASA) 或三条边 (SSS)，都可以决定三角形，假如给的是三个分角线的长又如何呢？三角形的数据一般有边长、角度、分角线长、中垂线长等等，随便抽三个出来是否就能决定一个三角形？

你试试看，大部分的都能解，只有一两个不能解。我中学的时候研究过

这个问题，考虑了一年多，最后发现这个问题并不简单。我小时候坐火车，在火车上都在想，最后看了一本参考书才知道能不能解，不过整个过程对我的思考帮助很大。

从前是二年级的时候开始念平面几何，我在三年班的时候开始想这个问题，还有很多比这个问题更复杂的问题，所以在最简单最平凡的问题中你可以找到很多有意思的问题问自己。

问题并不少，在自然界里或数学中问题多得不得了，问题是自己去找或如何去找。这个要自己训练，方法很多，要自己努力，同时要跟别人多来往。训练要花很多工夫，就是问，从早到晚你究竟花了多少工夫在那里？你要动脑筋，不是随便讲两句就行了。

做学问用功很重要

我从前有一个博士生，资质不错，想法也不错，我跟他说你一天，最少要花六个钟点在数学上面想论文，他说不行，后来他也没有再做下去了。我不晓得你们能不能坐六个小时想数学，或看数学？做学问全神贯注很重要，假如你觉得不能全身心投入的话，你干脆不要念数学算了。

从前我大学毕业后，我一天最少有十多个钟头在想数学，你并不一定要这样子，不过你至少要花一定工夫的钻研才能做一个好的数学家。你愿意花很多工夫以后我想你一定会有收获。

当然，一个好数学家，除了用功之外，也要有一些运气在里面，聪明很有影响，你们能考上清华，聪明应该不会差太远，真正重要的，还是全神贯注的能力。

从前，我们在中国香港长大，很想看参考书，但又贵又不容易找到。你们现在在清华，我想，你们要找什么都找得到，要找些比较好的研究员来跟你们讲东西，现在也容易多了，所以我想主要是你们能不能够做，最好不要找借口。

在国外很多大的学校，学生很多，不大容易找到好的老师，研究的机会可能也比这边少得多，我读大学时的经验就是这样，主要是你肯用功。

做学问是靠自己，做研究也靠自己。一般来讲，你到一个学校，刚好跟你做同一行的很少很少，顶多两三个而已。基本上是靠自己。在台湾参考书都有了，不一定要靠别人，要有发动自己的能力，自己肯问问题，单靠自己应该不会差太远的。

所以你一旦做决定后，你要享受做数学的乐趣，好比下棋，假若对下棋没有兴趣，被逼去下棋就很痛苦，可是你对下棋有兴趣的话，你越下越有意

思，下到困难的地方更有意思，做数学也是一样，碰到困难的问题更有意思，所以一定要建立兴趣。

兴趣是要培养的。如果你问一个小学生："你对微积分有没有兴趣?"你当然可以讲他对微积分没有兴趣，因为他根本不懂微积分。

同样的意思，如果我问你对微分几何有多大的兴趣，在你还没有开始做之前，你当然不晓得，因为你根本不懂微分几何。这其实是很空洞的问题，不能讲我现在有兴趣，或我现在没兴趣。不过到你真的做进去以后，你才发现你对它有很大的兴趣。

回答师生问题

问：请问丘成桐老师，您当初是什么原因才选择做几何这方面?是否有什么机缘?另一个问题是，我已经大四了，一些老师问过我以后想要念些什么，我以前的想法是要念数学，现在碰到这样的问题，好像对分析、几何比较有感觉，可是念到代数和拓扑，又觉得很有挑战性，好像很可以去念一番，以您的经验，不知您有什么建议?

答：我从前在香港时，觉得泛函分析很有意思，我很想念泛函分析，你讲我为什么对几何有兴趣，因为刚好我去以后，很多人在谈几何的问题，我自己也在看一些几何的问题，就这样做进去了。其实我的兴趣在很多方面，不能讲我的兴趣就在几何。我觉得数学不应当将它们分界得很明显，我也做很多其他方面的，这是第一点。弄懂第一个问题的回答后，也很容易回答你的第二个问题。因为整个数学的走向不应当有很大的分界线，你现在念大四，既然对代数、拓扑也有很大的兴趣，你就应该花很大的工夫去看，将这方面的基础全部打好。你要开放心胸，根本不要讲你对哪几门有兴趣，干脆每一门都尽量念好就差不多了。譬如你刚念微分几何，几何的东西是在一个拓扑流形上才能做的，你非要将拓扑搞清楚，才能做微分几何，对不对?假如你要念分析，其实现在有很多人用拓扑的方法去做，用不动点原理，用比较不同的拓扑去做，这也要学。不然就像我很多朋友一样，分析很好很好，可是一遇到所谓微分流形上的方程，或一些与这些有关的问题就通通不敢碰。当然也不能讲一定不好，就是有一定的局限性在里面。一个好的数学家，每一门都要做得很好。你现在大四，念了几门，至少在大学的课程里面，每一门都应该念好。你不要讲你有没有能力做到，事实上你一定有能力。你现在不把大学课程念好，你以后还是要念好。因为数学本来无分彼此，不要分得太厉害，所以我的建议是在大学时，不一定就讲你固定喜欢哪一门，你可以讲我现在对某门课兴趣比较大，不过你随时可以改变，我想这是比较好的观点。

数学是很自然的科学，研究很自然的现象，所以你看了以后知道什么东

西比较重要，什么东西不重要。有一些数学我是不愿意做的，因为很矫揉造作 (artificial)。每一个人的观点不同，我的观点是我不愿意做这些事。我是这样分的，而不是你们讲的按这一门那一门来分。

历史上有许多科目到了某一地方以后，不是讲它们不行了，而是它们发展成熟到了一个地步以后，被吸收融合到其他科目中去了，这个领域基本上便不再独立存在。如一般拓扑学，在历史上起了一定的重要作用，可是在变成基础以后，被吸收到所有数学领域中去了，我们现在根本不谈了。一般拓扑学变成一个工具，不成为一个领域了。我们可以想象数学里面有很多这种课，就是讲到了某个地步以后，我们对整个理论了解透彻以后，不再需要分这门课，假如你刚好念到这门课，而你又不愿意且不懂其他门课，你做这行就很麻烦了。

问：我听说有些数学家会对其他东西感兴趣，譬如对哲学有兴趣，不知道实际上怎么样?

答：当然每一个人在课余的时候，都会有不同的兴趣，这是很重要的。我认为凡是对思考有帮助的科目，你去看它总是有好处的。哲学对你的思考有帮助，有好处。譬如爱因斯坦就对哲学有很大的兴趣，爱因斯坦一开始在做广义相对论的时候，讨论过哲学上的问题，他也受了一定的影响。我们念数学，当然主要的精神是用在数学上面，我想念其他对你思考有帮助，很明显对你的学科本身也会有好处。每一个人有不同的反应，你对文学可能有兴趣，我个人喜欢看历史，我觉得历史对我很有帮助。

问：可不可以具体一点说明，像历史对数学的帮助在哪里？二流数学家做一流题目也算是一流数学家？历史经验帮你选取一流问题？

答：历史总归来讲，就是看从前的经验，对事物对不同东西的经验。经验对你在做题目时是有好处的。对一个题目取舍的问题，就是一开始讲的，这是一个表面上很简单的问题，其实有很大的学问。一个第一流的数学家，假如他选取的问题都是第二流的，他顶多也只是能做第二流的数学家。一个第二流的数学家，假如他选取的题目都是第一流的，他不一定做得到这个题目，可是他做到这个题目的二分之一，他也算是第一流的数学家，因为他对整个数学的发展有一定的贡献。什么叫第二流的学问？就是讲琐碎的问题，我们基本上对这些问题都有一定的认识，有很多人不太愿意做，或是有其他的原因不大愿意去做。你做第二流的问题，用了很大工夫去做，你做通了，对整个数学的进展没有很大的帮助。对题目的取舍，往往跟你的经验有关。譬如哲学的问题或是历史的问题，你可以晓得，经验对你有帮助，念其他书有时对你也有帮助。像文学好了，你看某些小说，或是看一本好的小说，我是讲很经典的文学小说，或者红楼梦或者三国演义（我不是讲武侠小说不行），你

就晓得取舍的问题有很大的不同。

问：过去数学家发展有很多理论，后来物理学家发现有许多物理理论的结构跟数学的结构一样。最近十年超弦的发现，是因物理学家认为应该用到更复杂的数学来研究高能物理，所以他们把代数几何或更抽象的数学引进来，您觉得这样走的路会不会是错的？杨振宁说过这种从抽象数学出发的路对的机会不大，不晓得您的看法如何？

答：这个问题看你是怎么讲法。爱因斯坦一开始做广义相对论的时候，没有物理的支持，他是从哲学或者科学哲学的方面来讲，晓得他会要什么东西，同时有数学的工具帮忙，做成了广义相对论。刚好过了没有多久，就有证明，某种程度的证明，广义相对论是对的。可是最大的问题是超弦不像爱因斯坦那样，积极找出他需要的哲学背景，超弦理论是刚好它没有一个很坚实的哲学背景。另一方面，它知道有某些东西在里面，就是讲有某种程度的对，不过还没有找到数学的背景在里面，所以现在正在找，最大的问题并不是数学的问题，而是物理上的哲学背景在什么地方。现在差不多好像在钓鱼，你看到鱼竿在那里动，可是看不到鱼在哪里，也不知道是不是真的是一条鱼。不过问题是我们从种种迹象来看，因为它在数学上具有惊人的相容性，至少作为一个数学家，我认为在某种程度上超弦应当是描述一个自然界的现象，否则不应当会有这样一个融洽的数学理论在里面。基本上很多人都是这样的看法，就是说我们要找它的哲学背景。现在还没有找到，基本上的原因是这样的，超弦的前提是非摄动的理论，可是现在所有的理论都是摄动出来的，问题是摄动和非摄动的关系是相差很远的，所以我们不晓得究竟是什么原因。

问：不过我们用量子场论的方法，也就是用摄动的方法用得非常好，为什么突然一下跳到超弦这个层次？

答：我想问题不单是超弦，自然界有四种力，强作用力、重力、弱作用力和电磁力，在强作用力下，摄动就已经不行了，已经不对了。

问：量子色动力学 (QCD) 还是一个摄动理论？

答：不过，QCD 里面很多用线性摄动做出来的结果跟实验已经不符合了。所以我想在 QCD 就已经开始出现分歧，所以并没有十分的证据显示超弦理论不对，因为弦论假设是非重力，所以我认为并不能成为超弦理论的致命工具。

问：不过苏联有一个很好的物理学家，认为重力甚至不是一个基本力，他觉得重力不该量子化，如果从这个角度来看，那整个超弦理论就错了，超弦理论是为了要把重力量子化。

答：这个问题是这样子，我记得陈省身常常跟我讲，四个力在那边很好嘛，为什么要统一它？就是刚才讲的，我们相信什么东西，假如你相信这个宇

宙是在一个很简单的基础上建立起来的，那为什么有四种不同的力，我们没有办法解释它，那就一定要统一它。就好像数学上面，平面几何有许多不同的公理、不同的理论，可是为什么我们很高兴找到几个公理，全部将它解释掉。问题是同样意思，这是一个信念，我们相信有这个简洁，我们要找几个公理可以假设，或是几个简单的定律可以解释不同的现象，越简单越好。你们相信的话，这个问题就没有什么好讲的。

问：那依照你的看法，超弦这个东西跟自然界过程还是有某种程度的关联?

答：就是刚才讲的，因为它在数学上得到不同的自洽，因为不是一个场，而是好几个不同的场都很自洽，基本上它不能解释它本来要解释的东西，它应当解释另一种物理现象。像从前做杨–米尔斯规范场的时候，或是从前 Hermann Weyl 研究规范的时候，往往一开始解释的物理现象不是要解释的，最后得到的是一个对的理论，不过这个理论解释不同的物理现象。

问：对于大学部高年级同学，若是对微分几何有兴趣，有哪些书较适合读?

答：我不晓得你们这边大学的微分几何念什么书?（答：通常是 Do Carmo 的书。）Do Carmo 的书念懂了也很不错了。微分几何的书其实也不少，看你自己念还是跟别人念。自己念的话，Spivak 的那本书写得很详细，好像还不错吧！Spivak 的好处就是它的符号弄得很清楚。你要跟一个讨论班念的话就大不同，Spivak 不是特别出色的专家，他的书本身没有教给你做微分几何的方法。Spivak 的书你念完后，将基本的符号搞懂，应念其他比较好的书。Milnor 的几本书写得很好，其实我从前念微分几何就是从 Milnor 那本《Morse 理论》开始念的，写得很简单很紧凑。

问：大学里面，除了数学以外有很多其他的科系，我们会想去碰文学或其他的东西。您作为一个数学家，不晓得对这些身外的世界有什么看法?

答：刚刚一开始讲过，第一件事，你一定要决定自己想做什么。无论做什么学问，你一定要有一段时间全神贯注，一定要将某门学问搞得很懂，搞到一个可以自认是专家的地步。你搞得很专以后，其间可能还会牵涉到其他学问，不过，你主要的注意力还是在那个地方。譬如来讲，我一天花十多个小时念数学，当然有其他几个钟头是跟其他人谈谈其他东西，有时候系里的课也听听，有时候物理的课也听听，不过我都有一个主要的研究课题。我不反对你们去看历史，去看哲学、文学，不过，你要晓得你的主题在什么地方，就是刚才讲的，你认为什么东西最重要。

一个人不可能又红又专，你刚开始的时候，假如你认为你可以同时又搞文学又搞数学，我想你两头都搞不好。这种同时搞两个完全不同学问能搞得

好的所谓天才，我还没见过。有一些人讲你要对社会关心，你对社会关心与你做数学并没有矛盾，你在做数学的同时花了时间去关心社会我不反对，我也不反对你花全部精力从事社会活动，不过你在做这个决定的时候，你要晓得你的数学会做不好，因为你事实上没有这么大的才能能够同时专心在两个不同的问题上。历史上我还没见过同时搞两门学问同时搞得真正通的，不大可能的。可是这并不排除你将数学搞通以后，你再去搞文学，或者搞完文学再来搞数学，当然搞完文学再搞数学要比较困难一点。很多数学家弹琴弹得很好，唱歌唱得很好，什么东西都有，有几个弹琴弹得第一流，不过，很明显他们晓得什么是主要的什么是次要的。做偏微分方程做得很出名的 Morrey，弹琴弹得第一流；做 Banach 空间上算子代数很出名的 Enflo，跟我共事过，年纪跟我差不多，他弹钢琴在瑞典是第一名或是第二名，不过并没有矛盾，他是在做完数学再去弹的，就是说你有个先后。

问：老师刚刚说做学问主要的是全神贯注。年轻人感情的问题常会造成困扰，老师当年求学是不是也有这种困扰？如何处理这种事情？能不能给个建议？

答：不应当有矛盾的。跟刚才一样，你做学问跟其他东西，如感情可以分得很干净的。你应当可以分得很干净，我看不出有什么特别大的矛盾。出名的数学家如 Euler，他有十多个儿子，家事很忙。从前做数学跟现在不同，比现在辛苦，你还要去支持整个家庭，有一大堆小孩要照顾。你去图书馆看 Euler 写的文章，至少几十本文集，你单抄书就要抄很久才抄得完。由此可见并不一定有矛盾。你不可能整天在想女孩子吧？

问：爱因斯坦说过一句话："专家不过是训练有素的狗。"不晓得你对这句话的看法？

答：首先我不相信爱因斯坦说过这句话。其次什么叫作专家是个很难讲的问题。假如单是重复人家能够做的，叫作专家的话，你可以说你的话是对的。你可以做一个擅长考试的学生，每次考试都考得最好，这是训练有素的，你叫他狗也好，叫什么也好。专家不专家实在很难定义，有时候你看小孩子玩电脑游戏，我觉得他们比我懂，他也算是专家。

不要讲一条狗，一条狗其实比机器聪明。现在很多人在做计算机应用，训练计算机想题目或者是做定理。现在还差得很远，最简单的问题就是"品味"的问题没有办法解决，就是一开始我讲的选题目的问题。你要决定一条定理好或是不好，这个问题机器没有办法决定，狗也没有办法决定。假如你所谓的专家是这样子的专家，他当然没有办法决定。我觉得怎么决定你做的题目有没有意思，是第一流的还是第二流的，这是一个很严重的问题。你当然可以讲所谓第一流、第二流是一个形式，随便你讲。不过微积分跟加减乘除既

然有区别，研究当然也有好的差的。假如你连这点都没办法分开，我们就不能讲是高层次的研究。

问：我们大一要念计算机概论，有人说对计算机懂一些对我们将来学数学会蛮有用的，又有人说没有用。请就你的了解，说明计算机跟数学有多大的关系。

答：就是刚才讲的，其实你学到一门严谨的学问，对你的学问总是有好处，计算机基本上也是一样。尤其是我们做数学，总是不懂我们要什么东西，不晓得应当什么是对的，什么应当是不对的，做研究的趣味就在这里。假如我们自己晓得什么是对什么是错的话，当然还是可以再去证明，不过最有意思的还是没有决定什么是对什么是不对的时候，这时我们往往要做实验。我们数学上的实验很多是用计算机做的，现在因为计算机比从前高级多了，所以对纯数学本身有很大的好处。跟刚刚找题目的意思一样，我们找找看有没有办法晓得有一定的规律出来，然后从那边再找我们要求的定理是什么东西。就是讲，你除了单在脑子里猜外，还可以让计算机帮你的忙。譬如研究非线性常微分方程和非线性偏微分方程，你很难预测它的大范围的行为是怎么样的。假如你很精通计算机，你可以用计算机算算看它怎么走法，对你有很大帮助。我个人其实不懂怎么做数学实验，我是找人家帮忙，所以你能够大学里面就学懂怎么做这个程序，做一个好的数学实验，本身是一个很重要的素质。

问：16、17 世纪的数学家，好像比较涉及其他的领域，比如物理天文方面，现在的数学家好像比较专注于数学，似乎不大一样，对不对？

答：其实没有不一样。问题是现在的天文、物理比从前的难，没有办法不难，我们观测到的数据多得多，就实验物理来讲，我们做数学的很难去接触，并不是我们不想，是因为数据实在太多了，很难处理。我觉得我们现在跟理论物理的关系和 16、17、18 世纪也差不多，不过那时学问分得没有这么细，所以看起来好像比较密切一点。其实我想再过一百年重新再看 20 世纪的数学跟物理的关系，我想不见得差很远。

首先你要晓得因为我们生在这个时代，很多东西看起来比较乱；其实过了一百年后，我们现在做的学问大部分都被忘掉了，剩下来几个重要的，所以那时候看可能比较清楚一点。我想你看 16、17 世纪的学问，很多东西根本就不见了，所以你看不出来，就是当时很多做的全部与数学无关的你也不晓得，单做数学的你也看不出来，你看到几个主要的人物，看到牛顿，看到莱布尼茨，没有多少人物可以数得出来，你单看到几个人的工作所以看起来好像很密切的样子。所以再过一百年以后，你看这个世界的工作，也是只看到几个人而已。图书馆里面，一天可以找到很多发表的文章，一千多篇都有，大部分文章都不见了，所以你可以想象得到。

问：那些不见的东西，有没有它的实质？

答：问题是这样子的，好像打仗一样，几十万人去打仗，结果几十万人你都不记得他们的名字，只记得几个将军，或者几个国家。你讲他们不重要，他们当然是最重要的，基本是一样的意思。

问：老师，您会不会觉得我们现在念的东西相对以前要困难很多？譬如说平面几何，以前是第一流的数学家在做的，现在我们拿来当基本工具。

答：跟刚才讲的意思是一样的，很多东西当时是困难，过了 50 年以后，你再看这些东西就很简单了。你想想看量子力学在几十年前除了几个出名的物理学家以外，可能对所有的物理学家都是很难的问题，现在每一个人都在用，同时用的时候假设成立根本没有问题。这是什么原因？我们开始研究的时候是很痛苦的，有不同的理论在里面，不同的理论当然有错的或不完美的，最后你要丢掉它，你丢掉它以后，就很干净，很容易看。这样我们一路做，一路将整个学问了解得清楚很多，到了解以后，这个学问变得清晰，吸收到其他不同的概念里面，就不见了。我举个例子来讲，当年高斯算很多微分几何的东西的时候，对当时而言都是很神秘的，高斯的一个著名定理说，曲率是内蕴不变量。我记得我大学的时候，写得很复杂的等式，看起来难得不得了，可是大概在你懂微分几何以后，你就觉得是很简单的结论。就是很多计算或很多重要的东西，时代远了以后，慢慢将它融会，变作一个数学里面的观念，不再是工具，这个观念你接受以后，你根本不会觉得困难。所以我并不觉得我们现在的科学会比以前难得多，而是我们刚刚好在这个时候发展科学，很多观念还没弄清楚，才觉得困难。

问：可是整体上知识的累积还是越来越多？

答：我想目前为止，我们的脑袋可以容许这些，并不见得有特别困难。因为知识不断地进来，我们不断地消化它。一个好的定理在刚出来时，往往难得不得了，几百页的证明，你当然晓得 Picard 定理，Picard 证明这个定理的时候，是一百多页的证明，现在 Picard 定理的证明可以一页多就证完了，这是什么原因？我们说这个定理重要，我们就会花很大力气慢慢将它消化，直到最后的定理看起来是平凡的，基本上重要的定理，就算不是短期的，十年、二十年后，这个证明会很简单，因为通常我们将这些定理的证明分解，分解成很小部分，各个小部分吸收到不同地方去，最后剩下的是一个平凡的证明，历史上所有的发展都是这样。比如平面几何，在埃及的时代，由于阿拉伯人一把火把埃及亚历山大图书馆烧掉了，埃及当然是没有文献留下来。不过我相信埃及造金字塔用了两千年，图书馆中一定搜存了很多关于平面几何的定理和事实。当时没有欧氏公理，所有的现象很乱，乱得不得了，这边一条定理，那边一条定理你可能觉得很难很难。可是这整个东西，等你将定理整个

了解以后，就变简单了，我想差不多是这个意思。

问：通常一个数学问题，会衍生出好多个问题来，但是数学家增加的速率远比问题增加的速率小，会不会造成一大堆问题做不完？

答：这个问题不大嘛，譬如刚才讲的平面几何，到现在你要找平面几何难的问题还是很多，你去看 Erdös 的问题集，很多是平面几何的问题还没有解决。没解决并不表示我们对平面几何不懂，我们对平面几何基本上是懂的，可是有未解决问题在里面，并不表示不好，而是表示这个领域还是很活跃的，表示还有很多问题可以做。反过来说，一个领域里面，没有未解决的问题，表示这个领域已经被我们了解透彻了，没有东西可以让我们继续再做下去。这个领域就可以说是枯竭了。

问：如果你现在从头再当大一学生，整个生活可以按照自己理想安排，你会怎么安排整个大学一直到研究所的生活？

答：我刚开始第一句就讲，我从前当学生的过程和现在不一定一样，因为时代不同，我们那时候的香港和你们这个时代就很不同。譬如来讲，你们比我们富有多了，我们那时，简单一句话讲，根本没有钱。你们现在找图书没有问题，我猜你们没有人抱怨图书不够，现在专业的工具也是完备多了。我们那时在香港要找一篇文章或一本书都很难，找到后有没有钱去买也是一个大的问题。那时老师比你们现在的不行，老师拿一个博士学位就很了不起了，大部分拿个硕士我们就觉得很不错了。所以我的大学经验和你们的经验有很多不同。你们的经验跟我在研究院的经验差不了太远，有好的研究人才，借书什么都不成问题。那时候我觉得在里面能够全神贯注于数学，我在研究院一年半的时候，基本上伯克利能够讲授的所有数学课程我都听过，我去听，有时还在课里面讲课，不单是听，同时要真的去做。所以要花很多时间，我不相信你们愿花时间去做到这一点。大学跟研究生的时候，是最容易念书，也是了解全部基本工具的最好时候，否则你毕业以后，有种种不同的因素，要重新再念基本工具就困难得多了。所以我说你能够花多少时间就尽量花进去，基本的课程要尽量能够念，甚至我认为你能够去念理论物理，去念理论化学都很好，看你自己的兴趣，对你会有很大的帮助。当然你对实验物理也有兴趣最好，只是这样你不会来念数学就是了。

问：在大学的时代，尤其像我们大一应看些什么课外书或杂志？因为大一，很多东西还没学，应该多看多学不同的东西还是多做练习？譬如平面几何的练习或高中大学的练习？

答：不能笼统地这么讲，要看每一个人的程度。你大一基本的东西还没懂的话，还能看什么课外书？我不晓得你们大一念什么课？线性代数念不念？主要是念微积分？微积分念懂了没？念不懂就不要跟人家讲什么东西了。至少要

将微积分念得很透，就是刚才讲过，你不要以为你要念代数，所以不念微积分，这是不可能的事，微积分在代数里面很重要，所以微积分你非要弄得很懂不可，否则的话，根本没有什么好讲的。课里面的书，你一定要念懂，习题要懂得做，这是第一点。习题要做不是为了考试，而是检验一下你对书里面内容有多少了解，然后再去念课外书，看你自己的兴趣。比如 Hardy-Littlewood 很多文章和书其实跟微积分有很大关系，或者你去看 Fourier 分析，你可以看分析怎么应用到数论。其实参考书很多，你尽量去多看一下。不过这跟每个人的兴趣有关系，或者代数的书，线性代数都可以。

问：现在教科书，像微积分这类书，越写越厚，习题一大堆，对于这点，不知您的看法如何?

答：微积分至少有一千多本书，我不可能都看过。从前我们看从前的老书，老书其实很好的，我们大学的时候读 Apostol 的书，有两本，现在还觉得蛮不错的。在大学一年多时间里，我从那两本书中学了不少东西。里面的习题有一本比较容易做，深的一本较难做，我想都可以学学。从前英国式的如 Courant 或 Hardy 的书都写得不错，他们是做分析的专家，所以写的书有一定的深度。其实我们从前中学看过 Hardy 写的《不等式》，是很好的书。这本书对你以后帮助会很大，就是了解不等式是怎么推导的，多学这个技巧，怎么弄不等式，我觉得很有意思。一般认为很奇特的东西不一定就比较重要，好像泛函分析、希尔伯特空间这些东西，并不见得最重要。微积分里面很多很基本的工具很重要，还有解题的方法也很重要。

问：我们念数学或上数学课的时候，往往感觉证明很长很长，弄不懂为什么这么证，又是怎么想出来的，念完整个领域，也搞不懂它在干什么?

答：这是一个很重要的问题，学生往往背了方法，记下来，定理就懂了，证明就完了，以为你基本上将定理背懂了，当然你因此考试可以考得很高分。不过，你要将一个定理想想，最重要的你要了解，为什么它要这样子做，究竟为什么要证明这个定理，这个定理有什么意思，这是第一步。然后你想想假设你不懂这个证明以前，你怎么去做这个问题，就是怎么样看待整个问题，这是很要紧的。为了要了解这个定理，你应该想办法，将整个定理看看有没有办法推广它，推广这个定理，最广泛的情形是什么样子？我并不是讲你为了推广定理而推广，这是一个学习的方法，从这个推广的过程你会慢慢了解这个定理的证明。你可以随便找个定理给我，我可以跟你们讲大概怎么样去推广它。

问：像隐函数定理?

答：你虽然没有学过希尔伯特，不过你可以试试在二维空间是怎么样的。你看隐函数是什么意思，试试看你有没有办法写下隐函数出来。隐函数定理

就是从一个方程式，比如两个变量的，$F(x,y)=0$，试试看找出 $y=f(x)$ 满足这个方程，想想看怎么去找，你自然就会明白，隐函数定理是怎么证的，回家试试看吧！隐函数定理是用迭代的方法证的，整个隐函数定理的步骤也是如此，你可以试一个具体写下来的方程，你试试看怎么去证明它，你就可以晓得整个思路的过程是怎么样的。如果有计算机，你可以试试看这整个迭代过程里面，用计算机是怎么一步步操作的。运行几次以后，你就可以比较清楚怎么走，然后你可以改进算法，晓得整个思路是什么样子。并不是讲这个东西很多人想过，不过在不断改进的过程中，你对这个问题会了解很多。

隐函数定理推广到希尔伯特空间上面去以后，就成为一个很重要的偏微分方程的方法，你可以试试看隐函数定理在希尔伯特空间是怎么做的，这个推广很重要，当然你可能还没有学过希尔伯特，不过你大可以试试看，你因此可以将希尔伯特空间学好，明白这个无限维空间是怎么回事。应用隐函数在希尔伯特空间上，这可以用来解微分方程。隐函数定理是不动点定理的应用，你当然晓得，你看整个不动点怎么用，迭代压缩映射，那边可以有很多不同的做法。有很多人一辈子在做隐函数定理的应用。所以随便一个数学问题，你可以找到很多不同的讨论的地方。最简单的问题你都可以找到很多不同的有意思的地方，所以你这样子才会将数学看得比较活一点。

问：请问丘教授在大学时代，对数学就是这样尝试的吗？

答：为什么不可以呢？反正有时间嘛。你大学的时候其实最舒服，你做不到也没有关系，做得到最好，就有兴趣。譬如来讲，你玩玩计算机看看，你觉得好玩，就玩下去，不好就找另外一个问题再做，没有谁讲你今天做不出来就不行。所以我想，这跟游戏差不多，其实跟念文学也差不多，主要是看你有没有兴趣的问题，你觉得有兴趣就继续玩下去，没有就算了。

问：老师以前读书的时候，有没有碰到读书的压力？

答：这个问题看你说的压力是怎么样的。譬如来讲，你考试总是希望拿到高分，尤其考微积分考算式，看你算得准不准，你怕算错了，这种压力当然有。不过如果你将整个微积分看懂了以后，这压力就不大了。就是说你已经懂了，你给个东西要我来微分、积分，我基本上会做，不过就是细节。譬如你要积分一个东西，积分出来刚好是它的答案，你当然会有这种压力。同时积分要用到不同的技巧，有不同的方法，你当然希望多学一些技巧，怕考试刚好要用到这个技巧，这种压力总是有的。另一方面，你对整个学问基本上懂了，在一方面你会比人家觉得没有压力。中学、大学都会有这种压力，有压力好过没有压力，假如你觉得很没压力，有时候，你根本觉得没有意思。

不可否认，每个人都有惰性，就是讲反正无所事事也好，不写文章也没什么关系，你就慢慢吞吞的，可是做学问没有这么简单，你要全盘了解，有一

定的压力在，其实对你很好。你在学生的时候把考试的压力看得很重要，其实你考试的压力比你以后要写篇好的文章的压力轻多了。考试的压力，就是你们前几天刚好在考试，你觉得很辛苦，有多少天？你顶多花十几天在里面，可是你毕业以后，你要做个好文章，你怎么晓得你有好的想法？你好像觉得很渺茫。另一方面，经验讲只要你用功的话，你总有一些好的想法，只要坚持不懈，你可以试十次，十次不中，第十一次中了就行。这跟下棋不同，下棋下错了举手无悔，不能重新改变，做研究你改变十次都没有关系，错了就继续第二个方法。所以问题就是刚才讲的，你错了十次，假如你们有压力的话，不能就算了，不做了，有点压力，就再试第十一次，你就中了，这没有什么不好，所以我觉得压力对你是个好事，不是个不好的事。

照我晓得的，基本上所有好的、出名的数学家或是科学家，都有压力在里面，有些人骗你，跟你吹他完全没有压力，很潇洒的样子，是装出来的。我觉得近代科学家里面，最出名最潇洒的是 Feynman，他讲话轻而易举的样子。Feynman 的物理课是很出名的，可是每一个人都晓得他花了很多工夫备课。他最后的演讲很潇洒，举手投足之间，什么东西都讲得很清楚，其实他花了很多工夫去准备。Milnor 写书也是写得很好，可是他也是花费了很多的工夫。

世界上是没有一个东西是不花工夫就可以得到很好的结果，他可能刚好想了很久以后，突然有段时间没有想，重新再想想出来。他那个时候想出来，好像不费吹灰之力，其实花了很多工夫。爱因斯坦是出名的物理学家，我在普林斯顿的时候，爱因斯坦所有的工作都在那边，爱因斯坦做广义相对论、量子理论花了很多工夫，天天都在想这个问题。压力可以说是同行间为了竞争做到同样的问题，就有很大的压力。这压力你讲是其他人给的也好，你讲不是也可以。因为并没有特别道理一定要将那个东西解出来，所以跟你的兴趣也有点关系，好胜心也有点关系。反正有不同的因素在里面。不过照我晓得，科学家总是有一定的压力在里面。很多人讲："我这一个大天才，我今天要想出来就想出来。"没有这种事，很多人做成这样子给你看，也不是第一流的数学家会跟你这么讲，第一流的工作是尝试了很多次才做出来的。

问：请问丘老师，我还有两个问题！好几年前，我们常常听到美国有一些很聪明的华人学生，得到"西屋"(Westinghouse) 科学奖，可是，过了一阵子后，这些人好像都消失了。那些聪明的华人都跑到哪里去了？以您在美国多年的经验，您的看法如何？是不是就像你刚才讲的，都跑去赚钱了？还有，您在北京当过客座，可不可以请您讲一下，那边学生读书的态度和这边的学生有何不同？据我所知，那边不管你从事什么行业，薪水都是一样的，所以他们很乐于做数学或比较基础科学方面的研究。

答：像"西屋"这个奖我觉得很好，因为一个学生要多方面思考才做得出来，当然很多是家长帮忙什么的，我就不清楚了。据我晓得拿"西屋"奖以后

出来的，大部分都是很能干的科学研究人才。你问华裔拿了“西屋”以后都怎么样？因为其中的大部分都不念数学，所以我不能很明确地讲他们的前途是怎么样的。

不过很多出名的公司里面有很多出色的华裔工程师，有很多与学术界的联系并不是那么密切，所以不一定听过。不过，有些华裔在美国，或中国台湾、香港、大陆很早毕业或很早什么的，反而有很多以后不行的。我想这跟“西屋”有一点点不同，因为很早毕业其实没有什么了不起，什么东西都没有搞通，你早毕业反而对你有坏处，所以有很多出名一下子后就消失了，我倒可以讲，我也可以了解他们为什么不行。“西屋”奖得主中因为念数学的不多，所以我不能跟你讲。

这五六年来，中国大陆念数学的也很少，原因就是因为现在在中国念工程念商学赚钱比较容易。十多年前中国大陆要出国留学，要到美国留学的，基本上他们是要念理论科学，数学、物理，所以那个时候要出国念数学、物理的很多，他们也为了这个很用功，当然里面也有不少为了学问而念学问的，不过很多是为了出国而念的，我想。最近几年因为中国大陆的经济比以前好多了，所以他们念数学的少多了，跟中国台湾有什么不同？我觉得反而这几年中国台湾还比较好一点，我想因为中国台湾钱多了，没有什么特别道理一定要念数学，所以大部分念数学的可能是对数学兴趣大点才来念的，所以中国台湾以后培养好的数学人才反而容易一点，希望如此。另一方面，中国有十多亿人口，要找到念数学的人还是有的，好的人才还是有的。

问：我们在做作业解问题的时候，常常想了很久都不知道该怎么办，可是翻开解答一看，它的想法实在非常怪异，不晓得我们要如何去了解这种怪异的想法？它在我们学习数学的过程中扮演什么样的角色？对我们整个思想又有什么影响？

答：我不懂你说的什么叫怪异？一个数学题目的解决，往往有很多不同的途径，尤其你们还没有做研究的经验。你讲的怪异是花了很多工夫来解决，或是很自然的解法？

问：只要几个步骤就解决了，然后你会很惊讶。

答：其实这对你有个好处，你能够懂得惊讶就对你很好，你要看懂了解决的方法，你就对解决的方法很难忘掉，对不对？假如你不惊讶你就背下来，一下子就忘掉了，这对你根本没有好处。每一个解决问题的方法，假如跟标准的书里不同的话，这是一个工具，可以讲是解决一个题目的方法的工具，逐渐积累起来以后，就是等于一个工程师他口袋里有很多不同的小工具。等你做其他问题的时候，这个工具可以重新再去用，所以为什么学生应当去解题目就是这个缘故。就是一方面你晓得一个数学的大方向，一方面你口袋里面

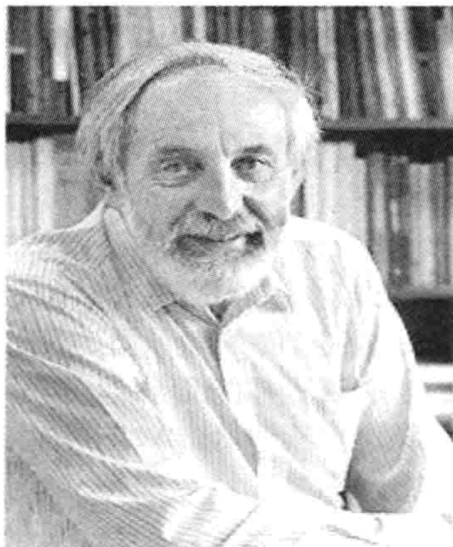
要有很多工具。

有很多人讲哲学、讲理论，“我认为数学什么样子，什么样子”，结果真正到了要解决一个问题的时候，口袋里面没有一定的工具。一个大房子盖的时候，你可以晓得基本上的工程是怎么盖的，可是你不能够就这样讲就算了，到了你真正要去盖的时候，就发觉这边要上螺丝，那边要上铁条，你不懂得上你就盖不起来，就是这个意思，所以做题目很要紧就是这个样子。基本上，如果你没有想之前就看那个解答，看了以后，这很简单嘛！基本上就是这边乘一乘，那边除一除就行了。可是，你先想那个题目，再去看解答，你才了解，这个解答并不是那么容易的，你搞一搞就搞不懂，为什么他就搞得懂？所以你一定要先想题目再看解答，一定要学这种工具，这种很奇异的解答要将它学会，学会以后，第二次再出现同样的问题，你就可以用。

名家文选

拉乌尔 · 鲍特，一个工程师的传奇

刘克峰



鲍特

2005 年 12 月 20 日，82 岁的哈佛教授拉乌尔 · 鲍特 (Raoul Bott) 悄悄地走了，随他而去的是他朗朗的笑声，慈祥温和的目光，慢条斯理却极为自信的声音，和一个匈牙利人的传奇。没有任何正规的数学训练，他从一个工程师成为一代数学大师，把要被开除的斯梅尔，自以为很笨的奎伦，物理出身的威滕都引导成了菲尔兹奖的获得者。八年前，在丘成桐为鲍特举办的 75 岁生日晚宴上，大数学家阿蒂亚讲述了鲍特的几件趣事后说，请鲍特的学生们站起来。一分钟内，全宴会厅的数学家们都站了起来，这里面有阿蒂亚，有丘成桐，还有来自世界各地众多的当代著名数学家们，他们都自认为是鲍特的学生。这些名校的数学教授们大都出身名门，或名校毕业，或名师之徒。可鲍特，像丘成桐先生所言，不知从哪里冒出来的工程师，却凭自己的智慧和人格构建了一个数学王国。他是一个天才的数学工程师。

我头一次看到鲍特的名字是在 1985 年南开的暑期班里，陈省身先生选了鲍特的书作为拓扑课的讲义。大学毕业后，这本书是我接触到的第一本现代数学书，从数百年前的微积分跳跃到 20 世纪 50 年代的拓扑学。可以想见这书当时对我简直就是天书。一个月的暑期课程下来我还是懵懵懂懂不知其中所云。倒是同班的余宝真和岳澄波明白得多，给我讲解过其中的几个习题，至今都还记得。后来这本书我不知翻了多少遍。鲍特从微积分入手把最有用的拓扑知识化解开来，由浅入深，真是妙不可言。读懂了这本书，大可以开始读文章做研究了。

作为一个数学家时时会有这样的感觉：当一个定理的发现者或证明者就

站在你面前，而你要用这个定理的时候，你会感到这定理也是有生命的，它活灵活现地刺激着你的想象力。鲍特留数定理对我就曾经是这样的。在中国科学院数学所做硕士论文时，我尝试着把威滕有名的用超对称理解莫尔斯理论的想法推到复流形上。最后的关键是要把问题局部化到全纯向量场的零点。我苦思冥想了很长时间还是理解不清问题的要点。记得 1986 年 7 月一个炎热的夏日，我迷迷糊糊地躺在凉席上，脑子里却全是如何局部化的念头。半夜里我猛然坐了起来，好像是从梦里得到了启示，脑子里兴奋地闪亮着那关键的一步。我全明白了！鲍特留数公式就是问题的答案。那一刹那可以说是我研究生涯中最兴奋的一刻了。因为这一刹那间的想法给了我有生以来第一篇论文，也给了我成为数学家的自信。也因为这一篇文章，我得到王启明先生的器重。1987 年底王先生把我的文章寄给当时刚去哈佛的丘成桐先生。1988 年初正在蜜月里的我收到了丘先生用快件寄来的哈佛大学数学系的申请表格。同年九月底我就走进了哈佛大学丘成桐先生的办公室，开始了我的博士生生涯。现在想来，这一切都好像是梦，而梦开始的地方就是鲍特留数定理。从此这个定理也成了我理解许多数学知识，证明许多定理的主要工具之一。

能去哈佛跟随丘成桐先生让我紧张兴奋，能在那里见到鲍特可以说也圆了我的一个梦。鲍特留数定理对我成了一个活生生的定理，和这个人合二为一了。鲍特高高的个子，腰板总是笔直。当时年近 70 的他胡须头发都已经花白。在哈佛数学系里，几乎每个角落里都能听到他那爽朗自信的笑声，每一个讨论班里都能看到他花白的头发。讨论班上只要有他在就会问题不断，演讲者就要不停地解释问题的每一步。似乎只要鲍特明白了，人人都会明白。鲍特也总是说：我很慢，我很慢。可他却总是能准确地抓住问题的要点。读他的那些文章，总感到他好像是轻轻巧巧地就把很困难的问题解决了。可这看似轻描淡写，实则厚积薄发的功力，不知他听了多少讨论班，问了多少问题，才修炼出来。

我刚到哈佛不久，一天系里的聚会完后，看到一个清瘦的老者让大家支起乒乓球案打起球来。老人所向无敌，好不得意。我斗胆上阵与他打了几局，完胜。打完后有个学生告诉我，这老者就是大名鼎鼎的塞尔。鲍特与塞尔是老友，20 世纪 50 年代初在普林斯顿高等研究院就相熟。鲍特年轻时就是读塞尔的博士论文入了拓扑的门。记得一天鲍特讲课讲到塞尔的博士论文，突然愤愤不平地感慨起来：生活太不公平，他塞尔每天除了打球就是读报，却还是证出如此多美妙的定理。别人证明一个定理为什么如此费力？后来塞尔的太太告诉大家，塞尔其实经常半夜里起来做数学。几年前，鲍特与塞尔分享了沃尔夫大奖，对鲍特也是个安慰吧。塞尔的成就是一个天才的奇迹。而鲍特的成就，尽管他总是自称很慢很慢，又何尝不是一个天才的奇迹。他工程师出身，没有正规的数学训练，却证明出了不朽的鲍特周期性定理、鲍特

留数定理，阿蒂亚–鲍特不动点定理，成为一代数学大师。在鲍特的办公室里，我看到过一幅俄国数学家的画，画上拥抱着的裸体男女象征着人类的繁衍和周而复始的生命。画的题目是：鲍特周期性定理。

我博士论文的起点是为了理解当时鲍特与陶布什刚刚证明的著名的威滕刚性定理。从最初的想法到最终的论文，我苦思冥想了几个月。当我兴奋地告诉鲍特我的证明时，他将信将疑地与我探讨了好多次，号称从不读书的他也为此专门读了椭圆函数的书。最终他的理解却比我想象的还要简单，简单得我都有点不能理解了。几个月后鲍特得意地告诉我他在巴黎演讲了我的证明。他说当时塞尔不大相信这个证明，他花了不少口舌终于说服了天才的塞尔。这故事对我这个刚出道的学生简直是天大的鼓励。我想那也是他告诉我这个故事的本意。记得他在巴黎时还让哈佛的秘书转告我，说他很希望我选他为导师从哈佛毕业，可我的导师已经是丘成桐先生了。尽管如此，我从来都把鲍特看成我的另一个导师。我已经记不得他给我写过多少封推荐信了，只记得我每有需要都会求助于他，他的信总是会及时寄到。我遇到挫折时，他会说：可怜的家伙。然后讲给我听早年数学家里的一些故事，鼓励我持之以恒，让时间证明一切。我想我们可以大致把数学家分为四类，一种是你既不敬重他的为人，也不敬重他的数学；一种是你敬重他的为人，却不敬重他的数学；一种是你不敬重他的为人，却敬重他的数学；最后一种是你既敬重他的为人，也敬重他的数学。鲍特就是一个让我由衷敬佩的数学家，从数学到为人都是我毕生的楷模。为人大智若愚，和蔼宽容，做数学举重若轻，点石成金。

从 1996 年我到斯坦福教书，我和鲍特几次在加州见面。我曾到伯克利为他讲解我当时刚做的热核与模空间。他也曾到斯坦福来和我谈我们那时刚证明的镜对称定理。四年前他和太太到洛杉矶访问了一个月，我终于有机会请他到我家里来做客，我们头一次有机会聊了很多数学外的事情。当时他和太太都喝了不少酒，告诉了我们许多他自己和他家庭的故事。这些故事当然都伴着朗朗的笑声。可惜从现在起我再也听不到这开心的笑声了。再看到他的那些定理时，我似乎不再觉得他们活灵活现了。但我却总能感觉到这每一个定理无穷无尽的美妙，甚至还能看到他满是皱纹的慈祥笑脸。有如此美丽的定理和快乐的笑声永远伴他，鲍特先生此生无憾了。

怀念拉乌尔·鲍特

Barry Mazur

巴里·梅休尔 (Barry Mazur)，出生于纽约，于 1959 年在普林斯顿大学获得博士学位。此后一直在哈佛大学数学系任教至今。梅休尔教授是国际著名的数论学家，在自守型理论、椭圆曲线理论上做出了极为重要的工作，为近二十多年来算数几何的发展奠定了基础，包括费马大定理的证明。他是美国科学院院士，曾获得韦布伦几何奖 (1965)，柯尔数论奖 (1982)，斯蒂尔重大贡献奖 (1999)。



“友谊第一，数学第二”。Raoul 曾经说过，然后他把那破旧的金褐色公文包夹在自行车的后座上，就笑呵呵地骑着他的自行车跑出自己的办公室，下了过道去附近的咖啡馆与来访的朋友碰面。

Raoul Bott（拉乌尔·鲍特）不仅仅是 20 世纪的一名伟大数学家，同时他还是我们很棒的同行，只要有他在场的聚会都会变得欢笑满堂。他的成果从早期在电路理论中的应用型工作，到著名的周期理论，后者依次把莫尔斯理论和环路空间理论的威力引入到微分拓扑中去，而又通过 Atiyah、Hirzebruch 和他自己的努力，使这些反过来促成了 K 理论的出现。K 理论同代数几何中的黎曼–罗赫定理和椭圆偏微分方程的壮观发展息息相关，并且在最近一段时期，它还被卷入到弦理论中一些不可思议的问题中去。

Raoul 的微笑（他说着说着就会露出友善的微笑），意味着同他交流常常会闪烁着幽默的光芒，充满欢快。Raoul 经常会说自己是一名怀疑论者。比

如他说过：“我一直都会对布尔巴基学派心存怀疑，这个门派实在太大了。它甚至连一条主线都没有。”但是，Raoul 的怀疑主义似乎总是打上自己特有的烙印的，伴随它的，还有那么多的幽默、乐观和开朗。除此他还总是会声明：“我不得不说没有什么数学不是我所喜欢的。”

在一些与他当时手头在做的东西相去甚远的方向的数学讨论班上，Raoul 常常会是那个问一些“泛泛问题”的人。那是一些仅仅从非常简单的事实中涌现出来的问题，某些在行家们看来有可能是第二特性，但是却真真切切来自于往下探讨的强烈渴望，这种类型的问题是大多数在座的人都会感激它被提出来的。宽容大量的作风渗透在 Raoul 的数学活动的各个方面：他的工作、他的交际和他的教学。

不管“数学武士”意味着什么，Raoul 都声称自己就是其中的一位。Raoul 这样评论自己，我认为这只不过是他对自己智力精神的自由（基本的自治）的一种简要的认可。Raoul 曾经说过：“你要追逐一个问题，而不是一个领域。你必须要遵从你的直觉，并且希望某一刻你可以偶然发现一个你有可能会做出贡献的方向。”但是要想成功，能有像 Raoul 这样非常广泛的数学阅历和良好的判断力是很有帮助的。判断力很重要，另外还要有他这样的视野的广度、谦卑、开明和和善。但是最关键的是，这些会有助于我们成为当代最伟大的数学家之一，就像 Raoul 一样。

名家文选

数学的印象

小平邦彦

小平邦彦 (Konihiko Kodaira)，生于日本，1954 年获菲尔兹奖。小平邦彦在美期间取得代数几何学上一系列成就，主要是把黎曼–罗赫定理推广到代数曲面，证明狭义凯勒流形是代数流形，证明小平消没定理。他同斯潘塞 (D. C. Spencer) 合作把黎曼的参模理论推广成高维复结构的变形理论，并把代数曲面的分类扩展到复解析曲面的分类，特别证明除直纹面之外极小模型存在，小平维数和极小曲面成为向高维推广的关键。他的变形理论是代数几何学和复解析几何学的重要方向。小平邦彦被认为是日本最伟大的数学家，他是日本学士院院士和美国等国家科学院的院士，他不仅获得菲尔兹奖，而且获 1984—1985 年度沃尔夫数学奖。



什么是数学？不太清楚。但我以为关心数学的某些人会有这样的感觉，认为数学实际不就是这么回事吗？本文要叙述一个数学家对数学的印象，像我这样对数学专业以外的事情就不太懂的单纯的数学家，在研究数学时，感到数学是什么呢？我是直率而不加修饰地谈这一问题以供读者参考。

一般认为数学是按严密的逻辑构成的科学，即使与逻辑不尽相同，却也大致一样。但是实际上，数学与逻辑没有什么关系。数学当然应该遵循逻辑，但逻辑在数学中的作用就像文法在文学中的作用一样。书写合乎文法的文章与照着文法去写小说完全是两码事。同样，进行正确的逻辑推理与堆砌逻辑去构成数学理论是性质完全不同的事情。

通常的逻辑谁都明白，要是数学能归结到逻辑，那么谁都应该懂得数学了。但是初中高中很多学生理解不了数学却是众所周知的事实。精通语言学但数学成绩不好的学生不在少数。所以我认为数学在本质上与逻辑不同。

数觉

考虑除数学外的自然科学，例如物理学可以说是研究自然现象中物理现象的科学。在同样的意义上，数学就是研究自然现象中数学现象的科学。因此，理解数学就要“观察”数学现象。这里说的“观察”不是用眼睛去看，而是根据某种感觉去体会。这种感觉虽然有些难以言传，但显然是不同于逻辑推理能力之类的纯粹感觉，我认为更接近于视觉，也可称之为直觉。为了强调是纯粹感觉，以下称此感觉为“数觉”。直觉包含着“一瞬领悟真谛”的含义，不太贴切。数学的敏锐，如同听觉的敏锐一样，与头脑好坏没有关系（指本质上没有关系的意思，而不是统计上没有相关关系）。但是要理解数学，不靠数觉便一事无成。没有数觉的人不懂数学就像五音不全的人不懂音乐一样（这只要担当数学不行的孩子的家庭教师就马上明白。你眼前看到的事情孩子却怎么也看不见，说明起来很吃力）。数学家自己并不觉得在证明定理时主要是具备了数觉，所以就认为是逻辑上做了严密的证明，实际并非如此，如果把证明全部用形式逻辑记号写下看看就明白了，那会过分冗长，实际上不可能（当然不是说证明在逻辑上不严密。而是依照数觉，那些明显的事实就略去逻辑推理而已）。最近每每谈及数学的感受，而作为数学之基础感受的，可以说就是数觉。数学家因为都有敏锐的数觉，自己反倒不觉得了。

数学也以自然现象为对象

把数学的对象看作是自然现象的一部分，也许有人说这不讲道理，但是数学现象与物理现象同样是无可争辩、实际存在的，这明确表现在当数学家证明新定理时，不是说“发明”了定理，而是说“发现”了定理。我也证明过一些新定理，但绝不是觉得自己想出来的。只不过感到偶尔被我发现了早就存在的定理。

正如大家不断指出的那样，数学对理论物理起着难以想象的作用。简直可以认为物理现象仿佛全都遵循着数学的法则。而且在许多场合，物理理论所需要的数学在该理论被发现以前很久就已经由数学家预先准备好了。典型的例子要算爱因斯坦广义相对论中的黎曼空间了。数学对物理如此起作用，其理由何在呢？过去的说法，归结起来是说数学是物理的语言。也许可以说，如广义相对论中黎曼几何的作用就是一种语言。但是在量子力学中，数学却

真起了魔术般的神秘作用，在这里无论如何也不能认为数学只是语言了。

翻开量子力学教科书，首先看到的是光的干涉、电子的散射等实验的说明，然后表明，光子、电子等的粒子状态可以用波动函数（即属于某个希尔伯特空间的向量）来表示，并导出与若干状态的波动函数有关的叠加原理。叠加原理认为，状态 A 若是状态 B 与 C 的叠加，则 A 的波动函数就是 B 的波动函数与 C 的波动函数的线性组合，它是量子力学的基本原理。

什么叫粒子的状态呢？例如加速器内电子的状态就是由加速器决定的，所以，粒子状态可认为是该粒子所处的环境。因此，在量子力学中就用唯一的波动函数（向量）来表示复杂至极的环境。这里首先是进行简单化、数学化的处理。状态 A 是状态 B 和 C 的叠加是怎么一回事呢？对于教科书中光的干涉等情形，其意义可以认为是显然的，而在一般场合，却很难理解环境 A 是环境 B 与 C 的叠加的意义。虽然根据普通观测的干扰可以说不确定性原理，例如不能同时观测粒子的位置与速度，但毕竟不能把粒子同时放在位置观测装置与速度观测装置中。就是说，粒子不能同时存在于两个环境中。那么什么又是这样两种环境的叠加呢？很难说清楚。另一方面，波动函数的线性组合演算在数学中却是完全初等的、简单明了的。叠加原理认为，这种简明的数学演算表现了复杂奇怪状态的叠加。就是说数学的演算支配着量子力学的对象即物理现象。明白了叠加的物理意义，就知道不是用数式表示它，而是把线性组合表示的状态叠加当作公理，反过来按数学演算来确定叠加的意义。正如 Richard Feynman 所说，叠加原理的说明只能到此为止。只能认为量子力学是基于数学不可思议的魔力。所以我认为，在物理现象的背后存在着数学现象是无可争辩的。

数学是实验科学

物理学家研究自然现象，在同样意义上，数学家研究着数学现象。也许有人会说，物理学家做各种各样的实验，而数学家不就是思考吗？但是，这种情况的“思考”就是思考实验的意思，与“思考”考试题的性质不同。我们知道，对考试问题，只要适当组合某个确定范围内已知的事实，一小时内一定能够解决，思考的对象、思考的方法都摆在面前。而实验则是为了调查研究原先未知的自然现象，当然其结果就无法猜想，也许什么结果也得不到。数学也完全一样，它是探究未知的数学现象的思考实验，虽说是思考，但思考的对象是未知的，思考些什么为好也不知道。数学研究的最大困难就在于此。

思考实验中最容易理解的形式是调查实例。例如考虑偶数最少可表为几个素数的和的问题。检查一下实际的偶数，2 是素数不算，$4=2+2, 6=3+3, 8=3+5, 10=5+5, 100=47+53, \cdots\cdots$ 总可以表为两个素数的

和。由这一实验结果，可以猜想“除 2 以外的一切偶数都可表为两个素数的和”的定理成立（这是早就有名的哥德巴赫猜想，现在还没有解决）。如果这样几次调查实例，能够猜想出定理的形式，以后就可以考虑证明该定理，那么研究的最初难关就被突破了。当然这是数学，光堆积几个实例还不是定理的证明，证明还必须另外考虑。

初等数论中的一些定理就是首先从这样的实验结果出发引出猜想，然后才证明的。从 19 世纪末到 20 世纪初，由 F. Enriques、G. Castelnuovo 等意大利代数几何学家得到的惊人成果中，依据实验的不在少数。实际上，J. A. Todd 在 1930 年左右发表的论文中曾明确断言：代数几何是实验科学。他们的定理全部得以严密的证明还是最近的事。值得注意的是，尽管他们给出的定理证明还很不完全，但是定理却是正确的。

发现新定理

最近数学的对象一般都非常抽象，实例也还是抽象的，难以想象，因此靠调查实例来猜想定理的形式，在许多情况下首先就不可能。我不知道在这种状况下，发现新定理的思考实验的方式是什么样的。即使说只是含含糊糊地想想思考些什么，恐怕也是不行的。实际就是那样，往往是不管怎么去思考都得不到相应的结果。这么说来，数学研究是不是非常困难的工作呢？倒也未必。有时你什么也没干，但却很自然地接二连三地看到那些值得思考的事情，研究工作轻而易举地得到进展。这时的感受充分表现在夏目漱石在《十夜梦》中描述运庆雕刻金刚力士的话上。引用其中的一部分：

> 运庆现在横着刻完了一寸高的粗眉毛，凿刀一竖起，就斜着从上一锤打下。他熟练地凿着硬木，就在厚木屑随着锤声飞扬的时候，已完全张开鼻孔的怒鼻的侧面已经显现出来。看起来他的进刀方法已无所顾忌，没有丝毫犹豫的样子。
>
> “原来使用凿子那么容易就把想象中的眉毛、鼻子做成了。”他颇为得意，自言自语道。于是，刚才的青年就说：“什么，那并非用凿子做出眉、鼻的，眉毛、鼻子本已埋在木材中了，只是靠凿子与锤子的力量挖了出来。就像从土中挖出石头一样，绝不会错的。”

这种时刻，想想这世间没有比数学更容易的学科了。如果遇到有些学生对将来是否干数学还犹豫不定，就会劝告他“一定要选数学，因为再没有比数学更容易的了”。

接下去漱石的话的要点如下：

> 他便觉得雕刻也不过如此，谁都能干的。因此他想自己也雕个金刚力士试试，回到家，便一个接一个雕刻起后院的那堆木材。不幸的是，一块木头里也没有发现金刚力士。他终于明白了，原来明治的木头里并没有埋着金刚力士。

数学也一样，普通的木头里没有埋着定理。但从外面却看不出里面究竟埋着什么，只好雕刻着看。数学中的雕刻就是一边进行繁复的计算，一边调查文献，绝不是简单的。在许多情况下什么结果也没有。因此数学研究非常费时间。可以认为，研究的成败主要取决于运气的好坏。

定理与应用

现今的数学，由实例猜想定理是很困难的，不仅如此，定理与实例的关系看来也变了。在大学低年级的数学中，定理之为定理，乃是由于可应用于许多实例，没有应用的定理就没有意义。好的定理可以说就是应用广泛的定理。在这个意义上，函数论的柯西积分定理是最好的数学定理之一。但最近的数学中，有广泛应用的定理几乎见不着，几乎毫无应用的定理却不少。正如某君不客气地说："现代数学只有两种，即有定理而没有应用例子的数学与只有例子而没有定理的数学。"从现代数学的立场出发，"不管有没有应用，好的定理就是好的定理"，但我却总觉得，没有应用的定理总有点美中不足。

数学的唯一理解方法

即使不做研究，只看看书与论文，数学也很费时间。比如只看定理而跳过证明，二三册书似乎很快就能读完的。但是实际上跳过证明去读，印象就不深，结果一无所知。要理解数学书，只有一步一止循着证明。数学的证明不只是论证，还有思考实验的意思。所谓理解证明，也不是确认论证中没有错误，而是自己尝试重新修改思考实验。理解也可以说是自身的体验。

难以想象的是，此外没有别的理解数学的方法。比如物理学，即使是最新的基本粒子理论，如果阅读通俗读物，总能大致明白，至少自己认为明白了，尽管很自然地与专家的理解方法不同。这就存在着老百姓的理解方法，它与专家的理解方法不同。但是，数学不存在老百姓的理解方法。大概不可能写出关于数学最近成果的通俗读物。

丰富的理论体系

现在数学的理论体系，一般是从公理体系出发，依次证明定理。公理系仅仅是假定，只要不包含矛盾，怎么都行。数学家当然具有选取任何公理系的自由。但在实际上，公理系如果不能以丰富的理论体系为出发点，便毫无用处。公理系不仅是无矛盾的，而且必须是丰富的。考虑到这点，公理系的选择自由就非常有限。

为了说明这件事，把数学的理论体系比作游戏，那么公理系就相当于游戏规则。所谓公理系丰富的意思就是游戏有趣。例如在围棋盘上布子的游戏，现在知道的只有围棋、五子棋和两类朝鲜围棋这四种类型。就是说，此刻所知道的公理系只有四个。除这四个以外，还有没有有趣的游戏呢？例如四子棋、六子棋、或者更一般的 n 子棋又如何呢？实际上下 n 子棋，当 n 在 4 以下，先手必胜，即刻分出胜负，所以索然无味；而当 n 在 6 以上时，则永远分不出胜负，也毫无意思。发现这种新的有趣的游戏并不容易。要找出跟围棋差不多有意思的游戏大概是不可能的。虽然这只是我的想法。数学也同样，发现丰富的公理系是极其困难的。公理系的选择自由实际上等于没有。

理论的丰富推广

数学家一般都本能地喜欢推广。例如假设存在以某个公理系 A 为基础的丰富的理论体系 S。这时谁都会想象到，从 A 中去掉若干个公理得到公理 B 系，从 B 出发推广 S 得到理论体系 T，再进行展开。稍加思索就觉得 T 是比 S 更丰富的体系，因为 T 乃是 S 的推广，但如果实际试验一下这种推广，许多场合与期待的相反，T 的内容贫乏得令人失望。这种时候，可以说 T 不过是 S 的稀疏化而不是推广。当然并非所有的推广都是稀疏化。数学从来是依据推广而发展起来的。最近推广不断堕入稀疏化，倒不能说是一种奇怪的现象。

那么，能发展成丰富的理论的推广，其特征是什么呢？进一步，公理系能作为丰富的理论体系的出发点的特征又是什么呢？现代数学对这种问题不感兴趣。例如，群论显然是比格论更为丰富的体系，但群的公理系优于格的公理系的地方是什么呢？在拓扑学、代数几何、多变量函数论等中，基本层的理论的出发点（看来似乎）是毫无价值的推广，它不过是用及数替换以前的常数作为上同调群的系数。而实际上却是非常丰富的推广，其理由何在呢？与此相反，连续几何被看作是射影几何的令人惊叹的推广，但却没有什么发展，这又是为什么呢？当把数学作为一种现象直接观察时，所产生的这类问题不胜枚举。虽然我并不知道，它们是否都是不屑一顾的愚蠢问题，抑或能

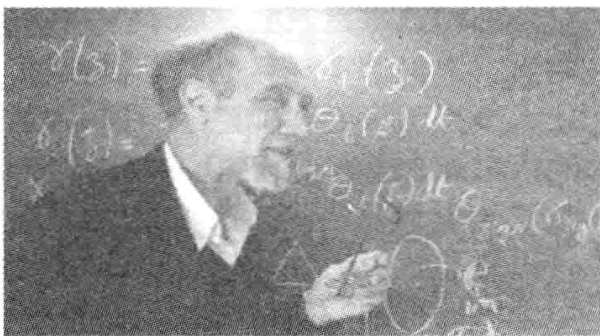
否建立一门以回答此类问题为目标、研究数学现象的学科，即数学现象学呢?但是如果能够建立，那一定是非常有意思的学科。为了研究数学现象，从开始起唯一明显的困难就是，首先必须对数学的主要领域有个全面的、大概的了解。正如前面说的，为此就得花费大量的时间。没有能够写出数学的现代史我想也是由于同样的理由。

名家文选

给初学者的建议

Alain Connes

阿兰 · 孔涅 (Alain Connes)，当代数学大师，生于法国的德拉吉尼昂，1966—1970 年在巴黎高等师范学校学习，其后在法国国家科学研究中心做研究，1973 年获法国国家博士学位。1976—1980 年在巴黎第 6 大学任教，1979 年以后在高等科学研究中心任教授，1984 年起兼任法兰西学院教授。1982 年获得菲尔兹奖，2001 年获得瑞典科学院克拉福德奖。他系统地把冯 · 诺依曼代数的结构理论推向完整，使算子代数产生革命性的变化。他把算子代数同各个主流学科联系起来，特别是微分几何、叶形理论、拓扑学、K 理论等，开创了非交换几何的研究领域。



数学是现代科学的脊梁，并且是一些新理念和工具的相当有效的源泉，借助这些我们才得以理解置身其中的这个“王国”。这些新的理念，本身就是人类思维这个蒸馏器经过漫长的“蒸馏”过程得到的结果。

我被邀请给青年数学家们写一点忠告。粗略看去，每位数学家都是一个独立的个体，而总体上来看，数学家们的表现行为却倾向于“费米子”般的特征，即避免在一个太大众的领域上做研究，然而物理学家们的表现却更像“玻色子”，他们组合成一个很大的团队，并且经常过分鼓吹他们的工作，这种态度是会被数学家们鄙夷的。

人们往往试图将数学作为一个具有一些独立分支的联合体来看待，比如将其分成几何、代数、分析、数论等 $\cdots\cdots$ 其中第一门被对“空间”概念的

理解所支配着，第二门被“符号”操作的技巧所支配着，再下一门则被趋于“无穷”的方式和“连续统”等所支配着……

但是这种看法是与数学世界中一个最重要的本性相违背的，即：要把上述的那些分支中的任何一个在不剥离自身本质的情况下从其余的分支中独立出来是不可能做到的。因此，数学的主体犹如一个完整的生命体，只有在结为一体的情况下才能生存，如果被分割成若干不相连的部分则就会消亡。

数学家们的科学生涯可以被描述成在“数学王国”中的一次旅行，在其中他们用自己的精神架构来逐渐开垦一片片土地。

科学生涯往往开始于对那些现存教条式表述的共鸣的行为方式——它们都是一些我们可以从现有的书本中找到的东西。“要成为数学家”的年轻人会在他们的脑海中意识到，他们对数学世界的直觉所捕获的一些特性会跟现存的教条不甚相符。在大多数情况下，这种初期的反应往往是由无知所致，但是它却允许人们依靠自己的直觉（如果这种直觉可以被真实的证明所支撑的话）将自己从对权威的敬畏中解放出来。一旦数学家们以一种原始并且“个性化”的方式开始真正懂得数学世界的一小部分领域（尽管它们第一眼[1]看起来可以很深奥），他们的数学旅程还是可以真正开始的。不要去打破“阿莉阿尼线团”[2]当然是很重要的，因为它保证我们总是用一双新鲜的眼睛去看待我们一路上会遇到的任何问题，并且在我们一次次感到迷路之时它会将我们拉回到出发点。

一直保持兴趣的变动也是非常重要的，否则我们会冒着一种风险，将自己局限在一个已经被技术相当特化且相对小的领域里面，因而缩减了我们对数学世界的直觉和它本身令人困惑的多样性。

那种观点真正的基本点在于，有如此之多终其一生在数学世界里面探索的数学家们都承认其间的等高线和它的连通性：不论我们征程路线的起点在什么地方，只要我们走了足够长的路，总有一天我们一定可以抵达一个有名的落脚点，比方说遇到了椭圆函数、模形式或 zeta 函数。“条条大道通罗马”，数学的世界是连通的。当然这并不是说数学的所有分支看起来都是相似的，这里有必要引用 Grothendieck 说的一段话，其中他比较了分析学与代数几何学之间的异同，前一领域是他最初涉足研究的，后一个领域则耗尽了他之后的整个数学生涯的心血：

---

[1]我在数学上的入门是多项式根的局部化，我很幸运很早就被邀请参加在西雅图召开的会议，在那里我发现了我今后在因子理论方面的工作的根基。

[2]阿莉阿尼 (Ariane) 是克里特（Crète）国王弥诺斯 (Minos) 的长女。国王养了一头怪物，每年要吃七对童男童女。雅典王子忒修斯 (Thésée) 决心到岛上的迷宫里除掉怪物，在进迷宫前，他偶遇阿莉阿尼公主，公主爱上了他，交给他一个线团，让他将一端放在迷宫外，一端拿在手中，以免迷路。忒修斯杀死怪物后顺线索安然出迷宫。所以 le fil d'Ariane 用来比喻“能解决复杂问题的方法”。

“我仍然记得那一震撼人心的时刻，如同从贫瘠的荒原转瞬间来到了富饶的乡村 ······”

大多数数学家都采取了一种注重实效的态度，并且他们都把自己看成是这个“数学王国”中的拓荒者，而至于该王国的存在性他们从来没有任何质疑的想法，他们用一种混合式的直觉揭示了它的结构，而且这似乎与“理想化的愿望”差不太远。这个数学世界中存在大量的合理性，这些需要多个阶段的深思熟虑。

每一代人都根据他们自己对这个世界的理解建立了一个“精神图景”，并且构造了越来越敏锐的智力工具来开发这个王国中以前从未被发现的那些方面。

一些数学世界中的分支，我们认为，它们在前辈们所详细描述出来的原始精神图景中是毫不相干的，而当我们偶然发现它们之间有桥梁相连时，事情会变得十分有趣。那时，你会觉得突然有一股风吹散了迷雾，展现在我们面前的是曾被迷雾遮盖的一道亮丽风景线。在我自己的工作中，这样的“巨大惊喜”主要来自于同物理之间的交互。Hadamard 对直接来源于物理的数学概念的深度进行了描述：

“不是那种时常影响数学家让其闭门造车的短暂而新奇的事物，而是那种从事物的本质中涌现出来的无穷丰饶的新颖。”

临了，我将给出一些更加“可行”的忠告，以结束此文。

• 散步

当你正在攻克一个很复杂的问题（常常带有计算）时，出去走一段很长的路（不带纸和笔），并且在自己的脑海中进行计算（不要顾忌对此的第一感觉——“它太复杂了，以这种方式我根本解决不了”），这是一项很明智的运动。即便有人不能成功完成它，这无疑也训练了“实时记忆”，并且在训练中强化了这种技巧。

• 躺下来

数学家们在高强度做研究阶段经常会有很难向合作者做解释的时候，那就是在黑暗中躺在沙发上的时候。不幸的是，所有的数学研究所在电子邮件盛行和电脑屏幕处处可见的今天，这种将自己隔离起来然后专心思考的方式开始变得越来越少，而它也变得愈加珍贵。

• 勇敢一些

通向我们“寻找”新数学的征程中有几个阶段，如果说“过关”阶段得小心翼翼，仅仅需要我们的理性和专心，那么“创造性”的第一个阶段则是完全不一样的。在某种意义上，你需要有一种对自己的无知的保护意识，因为总是有亿万个合理解释叫我们不要盯住那些好几代数学家都没有盯出眉目来

的问题上。

• 挫折

它的确在数学家们的一生中经常发生，而且会发生在他们科学生涯的任何阶段（常常是在最初的时候），举例来说，比如你从一位竞争对手那里拿到了他的一个“预印本”，然后你就会有一种崩溃的感觉。在这点上，我能开出来的唯一处方就是去“尝试”（它不总是容易做到的）将这种沮丧的感觉转化成加倍努力工作的积极动力。

• 得不到认可

我的一位同事曾经对我说过，“我们是在为了获得少数几个朋友的认可而努力工作”。这话说得在理，因为科研工作本质上还是相当孤立的，我们总是以各种各样的方式极度渴求这种认同感，当然相当坦白地讲——不要期望太高……事实上，真正的判断来自于自己，只要有了它就不会去愚弄别人，过分在乎别人的看法是在浪费时间：迄今为止，还没有哪个定理是根据投票的结果来得到证明的。就如 **Feynman** 说的一样：“你为什么要在乎别人的想法！”

名家文选

我的数学经历

Ken Ribet

肯·里贝 (Ken Ribet)，国际知名的数论与代数几何学家，美国艺术与科学院院士，美国科学院院士，曾获得 1989 年度费马数学奖。1973 年在哈佛大学数学系获得博士学位，导师是 John Tate。博士毕业后在普林斯顿大学和巴黎访问，1978 至今在加州大学伯克利分校任教，1985 年被授予伯克利大学杰出教师荣誉。在 1986 年证明关于椭圆曲线的谷山–志村猜想可以推出费马大定理，在费马大定理的证明中扮演了重要的角色。

我生于 1948 年，父母生活在纽约市。当我年纪还很小的时候，我们住在纽约布鲁克林区的一幢公寓里面，但是在我三岁的时候我们就搬到了皇后区的 Rockaway。我的妹妹是在我五岁的时候出生的。我的父亲是一名公共注册会计师，这意味着他经常要跟数字打交道。在孩提时代，我就经常看到他在加长长一列数字。我要他教我如何做算术，然后他答应了。我对数字入了迷，常常问一些算术的问题。在我稍微年长一些的时候，我找来一本父母亲在大学时候用的数学教科书，通过阅读这本书我提前学习了一些“较高级”的数学，就如后来我在学校里面学到的那些数学。这本书的内容一点都不高深，它更像是一本用以补习或复习的书，但是其中却包含了很多关于操作数字的基本要领。我的父亲很早就教会了我负数、分数和小数，而这些都是后来才正式在学校里面学到的。

我一直都是一名好学生，并且数学是我最喜欢的一门课。我通过自学的方式，在学习进度上一直略略领先于课堂教学。我从初高中（指中学）开始做一些奥林匹克竞赛的题目，特别是在高中的时候。我是全校数学代表队的成员，那里面解题最厉害的是一位名叫 Stanley Rabinowitz 的孩子，而今的他因对解题的兴趣和技巧而出名 (http://www.mathpropress.com/stan/)。

我的父母想让我变得高大或者至少正常一些，所以他们让我开始进行体

育训练。为了达到这个目的，他们给我施加了强大的压力，让我在一个非常强调体育训练的夏令营里面度过一个暑假。在我父亲的推荐之下，我在体育夏令营里面度过了六个夏天。最终，到了上高中的时候，我开始更多地根据自己的喜好来安排暑期计划了。在 1964 年夏天，那时我满 16 岁，我在布朗大学参加了一个由国家自然科学基金发起的科学夏令营活动，我们一起学习了材料科学、微积分和 Fortran 编程。我培养了对编程的强烈兴趣，并且学习了很多有趣的微积分知识，除此之外，我也并没有从这个科学课堂上得到什么东西。我们的微积分老师名叫 Salvatore Sutera，是一位工程教授 (http://biomed.wustl.edu/faculty/sps/)。我认为由一名主要兴趣在工程上的老师来教授我微积分是对我的教育很有帮助的。彼时彼境，我爱上了那个地方，并且下定决心要进入布朗大学成为其中的一名大学生，这算是我在布朗大学的这段经历留下的“副产品”吧。

在高中的高年级时期，我在高中开设的一个“进阶先修”课堂中又一次学习了微积分。同样，这次的教学方式还是纯运算的。我巩固了自己的理解并且把运算技巧练得炉火纯青——我对微分和积分运算已经相当熟练了。

在我高中毕业的那个暑假，我通过阅读当年在布朗大学和高中都用过的那本教科书中的表述方式来学习 epsilon 和 delta 数学语言，那本书是 George B. Thomas 写的第三版《微积分和解析几何》。我因书中“抽象”的推理而感到异常兴奋。我和微积分千丝万缕的关系或多或少说服了自己进入大学后要选择数学专业。(我曾经喜欢高中化学，并且有过在大学学习更多化学知识的短暂考虑。)

在我 1965 年 9 月刚刚进入布朗大学学习的时候，我就爱上了做学术的生活。在我一年级时候学习的线性代数和多元微积分课程把我的兴趣完全激发出来了。由 Frank M. Stewart 教的这门课程，被认为是标准二年级水平的课程的进阶版本。在我现在看来，它是在一个较高的档次上来进行教学的，它也许对现在伯克利那里优秀的初年级学生以及高年级学生是比较合适的。在二年级的时候，我选了 Allan Clark 的抽象代数课程，后来他接着写了一本这方面的书。之后，我遇见了 Kenneth Ireland (他不久之后就和 Maichael Rosen 撰写了《现代数论的古典概论》)，Ken 成了我的恩师和本科时代的导师。他在我需要学习哪些课程方面给了我很多建议 (比如，他和 Rosen 的课)，并且给了我两篇 Andre Weil 的论文：Numbers of solutions of equations in finite fields 和 Jacobi sums as “Grossencharaktere”。关于我在研究生阶段应该做什么事情的问题上，他给了我明确的方向：“去哈佛师从 Tate!”

我也的确是这么做的。我去了哈佛，希望可以写出高水平的博士论文，达到 Tate 以前那些有名的学生的论文水平。虽然得到哈佛的 Benjamin Peirce 讲座教授 John Coates 的很多帮助和建议，我对如何做研究还是没有头绪。我

请求 Tate 给我推荐一个问题。他对我真的是非常耐心！我们在一个讨论班上研读了 Serre 的书 *Abelian l-Adic Representations and Elliptic Curves*，接着又读了 Serre 1972 年的那篇文章的初稿，其中讨论了依附于数域上的椭圆曲线的模 p 伽罗瓦表示。Tate 建议的东西被我认为是 Serre 成果的一个非常温和的推广。我对做这种例行公事般的东西感到失望，而当我发现这个问题很困难并且我的结果还不完善的时候，我感到更加沮丧了。当 Tate 告诉我，我做的东西足够作为博士论文的时候，我分明感到自己的工作前景一片渺茫。

在 1972 年春天，我向相当多的美国学校投递了求职信，希望得到其中的至少一份聘书。当在 1973 年 1 月份我接到来自普林斯顿大学的电话的时候，我感到十分惊喜——我得到了普林斯顿大学的讲师职位！

在普林斯顿，我得到了来自数学以及其他方面的很多帮助，特别要感谢 N. M. Katz 和志村五郎教授。我得到了幸运之神更多的眷顾。比如，在我来到普林斯顿的第二年，我就解决了一个 Katz 向我建议的、被我认为相当容易的一个问题——结果却表明，它刚好补全了 Deligne 在完全实数域的 p-adic L-函数上正在做的一个成果。就在这一年，我收到来自斯隆基金会的一封信件，告知我获得了斯隆研究基金，我从来都不知道有这么一个基金，当我意识到它可以帮助我加入 Katz 和 Bernard Dwork 的团队时，我感到非常兴奋，而他们正打算在接下来的一年去巴黎高等研究所 (1975—1976)。

在这里搁笔是一个不错的选择，也许我还有机会做一些总结吧。不需要去学习那些美妙的抽象数学直到自己有能力正确地理解它为止，至少这样对于我来说是有帮助的。另外，显然良好的运气也会在一名数学家的成长道路上扮演重要的角色。还要提一下，你必须考察很多数学领域，直到找到一个让你感到真正兴奋并且又挺适合你的天资的领域为止。另外一个结论，不要把理解一个观点的速度和做一名数学家的能力混淆起来，这的确是我从与一些其他数学家的合作中得到的观点。一些在数学上做出了很深远贡献的人却在理解一个几乎全新的问题时表现缓慢。我学到的最后一课是，一个对于那些在这个方向上思考了很久的人看起来不值一提或者很显然的观点，却有可能对于大师来说都会显得很难，即便他是一个关注广泛主题的人，如果他不曾把这个观点作为一个问题来研究的话。

数学故事

杨忠道院士自传

杨忠道，浙江平阳（现温州苍南县）人。1946 年毕业于浙江大学数学系，1954 年获美国杜伦大学数学博士学位，同年去伊利诺伊大学攻读博士后，1954 年在美国普林斯顿高级研究院做访问研究。长期担任美国宾夕法尼亚大学数学教授，曾兼任数学系研究生部主任 4 年，数学系主任 5 年，1968 年当选为中国台湾中研院院士。杨忠道专长代数拓扑和拓扑变换群。主要成就有建立了拓扑学中的杨忠道定理，证明了代松 (F. J. Dyson) 猜测，解决了布拉希克 (W. Blashke) 猜测等。

做数学要有一股傻劲和拼劲。

——杨忠道院士

我是在浙江省平阳县一个乡下地方长大的，现在属浙江省苍南县平等乡。那时候平阳县很落后，全县没有一所初级中学，小学也不多。不过当地有一所私立初小，所以我自然地在那里就读到四年级。上五年级时附近就没有学校了，最近的学校离家五里远。天天走那么远去上学，不是体弱的我所能做到的，何况乡下多泥路，一下雨就不好走，所以上高小时我就住在学校的宿舍里，到周末才回家。

上四年级时，数学教师黄仲迪先生利用逻辑方法，讨论鸡兔同笼的问题，激发起我对数学的兴趣，从此我就喜爱上了数学。仲迪先生是一位十分难得的小学教师。他家境贫寒，只读了半年初中就辍学了。不过他努力自修，以教小学谋生，调教出来不少好学生。他给学生们的印象是口才好，而且知识丰富。1983 年我回故乡探亲，他得到消息后，特地到我弟弟家找我，互谈半个世纪中的演变。1991 年我在回家乡探亲时，县教育委员会安排我对数十位中学数学教师讲学一星期。我乘机提出邀请仲迪先生为贵宾，参加讲学前的典礼。在典礼中我介绍仲迪先生是我读数学的启蒙老师，希望大家以后以他为榜样。

因为当时平阳县没有初中，我上的初中在别的县里，离家约 70 公里。乡下的交通很不方便，从家里去学校需换舟车近十次，得花 15 小时，所以一学期中难得回家一次。父亲是地主的后代，到他当家时只有足以糊口的田地，对我上初中的费用负担得很辛苦。所以我初中毕业后没有让我考高中，但是停学在家不是办法，于是安排我在当地初小教二年级，让我用自己赚来的钱去上高中，再看以后如何。因为失过学，我成熟多了，也感到求学的可贵，所以在高中三年中，我的成绩总在班上前三名，因此得到公费，使我完成高中学业。读高中时我的数理化都不错，以数学被老师及同学们认为最出色。文科的成绩不坏，但是那都是靠死记硬背得来的。

在艰苦的生活下，父亲知道祖产不能凭，也知道他年纪大了必须由我去赡养他，因此他鼓励我去念工科。当时我很喜欢数学，也是理化的好学生，于是去向数学教师陈仲武先生请教。仲武先生早就了解我，而且有他个人的判断。他没有犹豫地说："你当然去念数学，如果连你也不去念，还有什么人该去念呢?"凭仲武先生这一句话，我就义无反顾去读数学了。

那时候平阳县的教育虽然很落后，但是出了两位数学家。第一位是姜立夫教授，他于 1919 年获得美国哈佛大学数学博士学位，是中研院数学研究所第一任所长。第二位是苏步青教授，他于 1931 年获得日本东北帝大数学博士学位，是台湾大学理学院第一任院长。两人都是中研院第一届的院士。我从小就听过他们的大名，但到 20 世纪 40 年代才认识他们。

高中毕业会考，我的成绩不错，可以保送进国立大学就读。当时我决定进浙江大学，师从苏步青先生学习现代数学。抗战期间许多地方被日军占领，浙江大学已迁到贵州去了。所以大学一年级我是在浙大龙泉分校念的，到第二年才到贵州去。

当时浙江大学数学系在贵州省湄潭县，步青先生是系主任。说起来很难使现在的年轻人相信，那时候系里没有职员，系主任必须总管系里大小事务。幸亏全系师生的总人数只有三四十人，非有要事不会去麻烦系主任的。步青先生对学生亲如子女，照顾得很周到。我是他的小同乡，觉得他对我更好些。

步青先生的努力，大概没有第二个人可以及得上，这由下述的事实可见。1944 年，步青先生家里有七个小孩，最大的上高一，最小的刚出生。那时候教授的薪水不高，他没有办法雇人帮忙。一家九口的家事靠师母一个人做，事实上不可能，所以步青先生和大的几个小孩都得帮忙。那时候数学系没有办公室，师生们有事情找他只好直接去他家。因为没有电话，无法预先约定时间，所以白天和晚上，随时有人登门拜访。在那种情形下，他不但处理系务、教课，而且继续做他自己的研究工作，也指导年轻教师做研究。每年总有几篇论文发表在外国数学杂志上，真是谈何容易。步青先生很能利用他的时间，

好多次到他家时，见到他一只手抱小孩，同时阅读数学书籍，还用另一只手写笔记。说他一个人做两三个人的工作，不算太过分吧！有这样一位老师摆在前面做榜样，想偶尔偷点小赖也找不到借口了。

20 世纪 40 年代，浙江大学数学系的课程和现在台湾大学数学系的课程大同小异。我读过的课程，在一年级时有微积分和微分方程，在二年级时有高等微积分、级数概论、立体解析几何及选修的数论和偏微分方程，在三年级时有综合几何、近世代数和复变量函数，在四年级时有微分几何、实变量函数和数学研究。在浙江大学我没有念过泛函分析、拓扑学，原因是没有教师能教授这两门课。据记忆，在大学四年中，我的数学课的成绩没有低于 90 分的，好像每学期的总平均都高过 90 分。我让步青先生惊讶的不是这些高分，而是在二年级读理论力学时得 90 分。理论力学是数学系学生的必修课程，但可待至三四年级时再读。这是一门出名难读的课程，数学系好学生去读时，有时也很困难，甚至不及格须补考，使数学系很不满意。怪不得步青先生见到我的高分时，笑着对我说："数学系多年来的怨气，给你一下子出光了。"事实上物理系学生读这门课同样有困难，和我一起读理论力学的同学有十多人，及格只有五人，而且都是数学系的。

上三年级的综合几何课是步青先生亲授。他鼓励学生阅读课外参考书籍，因此我读了一本德文版的射影几何。也许他认为我还能担当一些工作，于是指派我义务替数学系管理图书杂志，也能就近翻阅易懂的数学文章。因此我上四年级时，自己找题目完成一篇论文。步青先生觉得还不错，结果那篇论文在美国发表 (*Duke Journal of Math.*, 1947)。大学毕业后，我留在系里任助教，两年中又自己找题目做论文，除在国内发表的外，又有一篇在美国数学杂志上发表，再有一篇在阿根廷数学杂志上发表。如何去找题目，求解答，主要是受步青先生的训练，当时不够深入。文章虽然可以刊登出来，到后来再看，太肤浅了。

1947 年起政局相当混乱，已不可能在学校里安心做研究工作，于是我征得步青先生的同意，于 1948 年夏天，去中研院数学研究所，师从代所长陈省身教授学习代数拓扑。目的是希望在两三年中，学到一些新的知识，再回到浙江大学数学系。没有料到去了中研院后，时局急转直下，数学研究所的研究活动完全停顿，同时陈省身教授决定接受邀请，去美国普林斯顿高等研究院做研究。接着"教育部"发表历史语言研究所傅斯年所长将继任台湾大学校长，于是他提议将中研院迁往台湾。但是可以想象，如物理研究所、化学研究所等有实验室设备的研究所根本不可能考虑搬迁，所以最后决定搬迁的只有历史语言研究所和数学研究所，而且只准许部分人员去台湾。

根据我的了解，数学研究所的安排是所长姜立夫先生和代所长陈省身先生共同决定的，一方面保全图书杂志，另一方面保全部分研究实力，以备来

日东山再起。随数学研究所到台湾的研究工作人员，除立夫先生外，有副研究员王宪钟先生和胡世桢先生及助理员三人，即廖山涛、陈杰和我。王、胡两位先生曾在英国获得数学博士学位，打算到台湾后再去美国觅教职（后来都是中研院院士，已过世）。至于三位助理员，将协助他们去美国留学。我知道有一位助理员要求去台湾被拒绝了，我是到所最晚的助理员，为什么被挑中，则非我所知了。

到了台湾后，院方告诉数学所四位单身人员，没有办法安排我们在台北居住，暂居的地方是杨梅镇。到了杨梅镇，才知道居住的地方是在一仓库里。历史语言研究所书籍很多，堆积在杨梅镇的一所仓库里。临时把两个书箱排在一起，在上面摆一个榻榻米，就作为我们每个人的床铺了。仓库的建设，并没有准备在里面住人的，窗户小，而且高逾一丈。屋顶很高，只有近屋顶地方，才有几盏昏暗的电灯。大门一关，黑暗得很。加上杨梅镇风大，非关大门不可，所以几天后大家都知道白天非出去不可。杨梅镇只是一个小镇，没有图书馆，没有公园，一条小街上只有几间小铺子，进去后若不照顾生意，两三分钟就得出来，所以我们四人决定必须自已设法回台北找居住地方。经过努力，也通过私人关系，我们四人在台北厦门街台湾大学一个招待所里，找到了一间六榻榻米大的房间。因为没有壁橱，四个人睡在四角落，让皮箱堆在中央。虽然如此，比在杨梅镇好多了，至少在白天可以上公园、逛街、逛书店。那时候想找一个地方坐下来写一封信都不容易，更谈不到做什么工作。

后来我知道师院附中（即后来的师大附中）急需一位数学教师，教高二三班的大代数，于是去向立夫先生请示。他说反正目前无法工作，先利用这机会解决眼前的困难再看吧！所以我决定接那份教职，但是有条件的，就是说必须有单身宿舍可以住。因此我在师院附中执教了一学期。

到 1949 年夏天，生活情况好多了，但人事上有变化。立夫先生去了广州，决定留在那里帮岭南大学创办数学系。王、胡两位先生在美国找到教职，离开了台湾。陈杰因惦念未婚妻，取道广州回四川。廖山涛和我两人正式在台湾大学数学系兼任讲师，而且有宿舍可住。由 1949 至 1950 年，我教一班土木系的微积分和一班机械系的微分方程，其中许振荣先生去美国进修，他的高等几何课也由我代授。记得那班上的同学有王典荣（已在香港中文大学退休）和吴青木（已在淡江大学退休）。在微分方程班上的吴达森同学，后来转读数学系，留美而成为美国大学的教授。

1950 年王、胡两先生帮我获得助教奖学金，去美国路易斯安那州的杜兰 (Tulane) 大学读博士学位，旅费是中研院给的，到那时我才知道，这个安排在数学研究所搬迁到台湾之前，已经取得院方同意。同时，廖山涛亦去美国留学，也得到同样的待遇。

初到美国时，我的英语不好（后来也没有好过，只是能够应付而已。这一点我觉得去美国留学的人必须注意），一天到晚羞于开口。也许在十多位数学系的研究生中，我是唯一的非美国人，所以大家对我都很照顾。第一学期我选了四门数学课及一门阅读报告。其中一位授课老师是 A. D. Wallace 教授，也是我博士论文的指导教授，他教课的方法是他的师祖 R. L. Moore 创造的，将课程内容分作许多小命题，预先发给学生。上课时他要学生上台去证明，他自己坐在台下听。一个学生没完成时叫第二个上去，一个小时没有完成就留到下一小时再继续，他自己绝不帮忙。我的英语虽然不好，但在他的课中表现得不错，所以一开始就给他一个好印象。他对学生们很友善，常常在课余时到研究生的办公室，谈谈数学，也讲笑话。见到我的时候，总要提出或大或小的数学问题，嘱我多想想。第二个学期一开始，他嘱我去读法国数学家 H. Cartan 在哈佛大学教授代数拓扑的讲义。

第一学年结束后系里给我生活费，嘱我在暑期中好好用功。Cartan 讲义中一个主要成果是“对紧致 Hausdorff 空间，某两种上同调理论等价”。在 Wallace 教授的课程中，我学到了完全正规空间 (fully normal spaces) 的概念。经过几个星期的思考，我觉得 Cartan 讲义中那成果可以被扩充到完全正规空间。当我向 Wallace 教授提起这一发现时，他十分惊讶，于是抽空和我讨论我的构想。几星期后他逐渐相信我的构想很可能是对的，可以作为我的博士论文，于是他开始筹划我的前途。杜兰大学是美国南方一所好大学，在全美也称得上二三流学校，不过数学系在我之前只出过不到十位博士，于是 Wallace 教授通过系主任请研究院给我一个例外待遇。得博士学位照惯例必须修满 20 个学分，但 Wallace 教授觉得为我，为数学系，反不如早点给我博士学位，而且推荐我去研究活动多的地方求进一步的发展，所以系里特许我第二学期不用选课，专心去书写博士论文。

Wallace 教授的初意是希望我去普林斯顿大学数学系任讲师，能师从 N. Steenrod 教授做代数拓扑的研究，但是没有成功。1952 年秋天我去了伊利诺伊大学数学系当博士后，每周教授三小时，同时参加系里研究活动。那时候系里有一位代数拓扑的教授 D. G. Bourgin，带五六位博士研究生，研究的主要对象是 Dyson 的猜测。我不但去听 Bourgin 教授的课，也去参加他率领的讨论班。经过一年的努力，我得到了 Dyson 猜测的一个证明，Bourgin 教授知道后十分惊讶，当时只说他自己也做得差不多了。这件事使我很尴尬，于是去向陈省身先生请教。他给我一个建议，说最好的解决方法，是两人合写一篇文章去发表，不过必须由他提出来才是。如果他不提，我应该自己发表，不过文章中应提及听说 Bourgin 教授有一独立的证明。结果我的文章于 1954 年发表在 *Annals of Math* 上，Bourgin 的文章于 1955 年发表在瑞士一数学杂志上。在伊利诺伊大学我停留了两年。我在那里的时候，施拱星先生正在

那里读博士学位。周元燊院士去读博士学位恰在我离开之后，我曾帮忙向系方推荐他。

我在伊利诺伊写的两篇文章颇引人注意，同时 Wallace 教授继续努力推荐我去普林斯顿做研究。1954 年秋天，我获得美国国科会一年资助，去普林斯顿高等研究院做研究，主要是将 Dyson 猜测再扩充，使亦包括 Borsuk-Ulam 定理。一切安排是 Wallace 教授通过 D. Montgomery 教授才办成功的。

Montgomery 教授出身于小型的大学，所以他十分同情非名校出身但工作能力强的年轻数学工作者，也很同情来自他国的学者，他的理由是由名校出身的美国人已经有很多的机会，无需他人多帮忙。每年去普林斯顿高等研究院做研究的数学工作者在 50 人之上，年轻的较多，在大家的心目中，以 Montgomery 教授人缘最好。

我的研究计划，半年内就完成了。顺着同样路线做下去，前途并不乐观，所以我觉得有必要另找途径。正在那时候，Montgomery 教授和 L. Zippen 教授合写了一本书 *Topological Transformation Group*。前半本解答希尔伯特第五问题，那是四年前他们合作的一篇文章和 A. M. Gleason 的一篇文章中所得到的成果；后半本讨论拓扑变换群。因为这些是当时大家公认最重要的贡献，当然非好好读不可，于是我自荐帮忙那本书的校对工作。读完了全书，我觉得可以考虑某些问题，于是向 Montgomery 教授请教。他听了以后，告诉我其中一个问题，正是他和 H. Samelson 教授研究的对象，立即表示欢迎我加入他们的行列。因为这个偶然的机缘，使我在那两年中，和他们两人合写了两篇文章。

1956 年秋天我去宾夕法尼亚大学工作，一个原因是宾大数学系有一位教授在高等研究院进修，知道我的研究工作，也知道 Montgomery 教授和我合作，竭力向系里推荐我。另一个原因是宾大距离普林斯顿相当近，不论自己驾车或搭火车，一个多小时可以到达，使我有较多机会向 Montgomery 教授请教。在宾大我一共工作了 35 年，起先是助理教授，1958 年被提升为副教授，1961 年被提升为正教授。在职期间，曾兼任数学系里研究生部主任四年，数学系系主任五年。在我指导下完成博士论文的有 L. Mann (1959)，后来任马萨诸塞大学数学系系主任多年，1961 年有苏竞存，他于 1954 年毕业于台湾大学物理系，后来改念数学，现在是马萨诸塞大学数学系教授。

来宾大教书最大的好处是可常去看 Montgomery 教授，后来他干脆每星期留下一天，让我去和他讨论数学。这样维持了 20 多年，合写了 20 多篇文章。

编者按：本文根据 2000 年 1 月 17 日对杨忠道院士的采访整理而成，采访人：张海潮，记录人：叶德财。

数学故事

拉马努金，一个未成年的天才

蔡天新

蔡天新，浙江台州人，曾是少年大学生，山东大学理学博士，浙江大学数学系教授、博士生导师，专攻数论。他同时是一位诗人、随笔和游记作家，近作有诗集《美好的午餐》，随笔集《在耳朵的悬崖上》、《欧洲人文地图》，游记《飞行》、《英国，没有老虎的国家—— 剑桥游学记》，摄影集《从看见到发现》，童年回忆录《小回忆》等，主编《现代诗 110首》(蓝、红卷)。

英国皇家学会会员

自从 16 世纪以来，剑桥大学一直是英国的最高学府，在她拥有的种种优良的学术传统中，有两点至关重要，那便是精英意识和团队精神。前者的典范是卢卡斯数学教授和卡文迪什实验物理学教授职位的设立和聘请，后者则表现为这所大学的大门始终向全世界的英才敞开着。1912 年，23 岁的奥地利工科大学生维特根斯坦应邀来到了剑桥，与那个时代最伟大的两位哲学大师伯特兰 · 罗素和乔治 · 摩尔密切共事。两年以后，来自印度南方马德拉斯港务局的小职员拉马努金 (Ramanujan) 也被请到了剑桥，与两位正处于事业巅峰的数学巨匠哈代和约翰 · 利特尔伍德开始了天作之合。不到四年，拉马努金也和他的两位同事一样，名字后面有了一个记号 F. R. S.，即英国皇家学会会员，那年他刚满 30 岁。

在新千年到来之际，美国《时代》周刊评选出 20 世纪 100 位最具影响力的人物中，唯一入选的哲学家便是维特根斯坦，而拉马努金则被公认为是一千年来印度最伟大的数学家。从尼赫鲁到英迪拉 · 甘地，历任印度总理都对拉马努金予以褒扬，他被誉为“印度之子”，与诗人泰戈尔并驾齐驱成为印度

最受尊敬和爱戴的人物。到 1987 年，即拉马努金诞辰一百周年之际，印度已拍摄了三部有关他生平的电影，美国佛罗里达州开始出版《拉马努金杂志》，并成立了一个国际性的拉马努金数学会。在拉马努金的故乡马德拉斯，当容纳他最后一年心血的遗著《失散的笔记本》出版时，拉吉夫 · 甘地总理亲自赶来祝贺并参加了首发式。本文的部分素材取自美国人卡尼格尔撰写的拉马努金传记《知者无涯》，该书的中文版由上海科技教育出版社推出。

德国数学家克莱因曾经说过："推进数学的，主要是那些有卓越直觉的人，而不是以严格的证明方法见长的人。"毫无无疑，拉马努金正是一位有着卓越的数学直觉的天才，而哈代则教会他证明和严格性，同时保证他的创造性的思想之源畅通。更重要的是，哈代是那样一种人，"只要他站在你面前，你就得使出全部力量来"。当有人问起他一生最重要的贡献是什么时，他回答说，"发现拉马努金"。而在另一处有记载的文字里，哈代也提到，"拉马努金是我的发现"。在拉马努金去世多年以后，哈代亲自设计出一种计算一个人数学天分的评分表，他自己得了 25 分，利特尔伍德得了 30 分，同时代最伟大的德国数学家希尔伯特得了 80 分，而拉马努金则得了满分 100 分！除了在纯数学方面做出卓越的成就以外，拉马努金的理论还得到了广泛的应用，他发现的好几个定理在包括粒子物理、统计力学、计算机科学、密码学理论和空间旅行等不同领域起着相当重要的作用，甚至晶体和塑料的研制也受到他创立的整数分拆理论的启发，而他在模形式领域的工作则是目前相当流行的超弦理论不可或缺的，他生命中的最后一项成果——仿 theta 函数——甚至有力地推动了用孤立波理论来研究癌细胞的恶化和扩散。1962 年，当印度邮政局发行纪念拉马努金的邮票时，着实费劲地说明了他另一项工作的应用潜力，"他在黎曼 zeta 函数方面的研究成果，现在已经与齿轮技术的进步挂上了钩，还被用于测温学和炉子的改进，以便用来建造更好的高炉"。

受宠的"独生子"

在有着"圣雄"、"印度国父"之谓的莫汉达斯 · 甘地前往英国留学的那一年，即 1887 年 12 月 22 日，斯里尼瓦萨 · 拉马努金 (Srinivasa Ramanujan) 出生在印度南方泰米尔纳德邦高韦尔河畔的小镇埃罗德，这是他母亲的娘家。高韦尔河是南印度的恒河，满周岁后，按照当地的习俗，拉马努金随母亲搬回到下游 200 多公里处的城市贡伯戈纳姆，那里曾是历时一千多年、领土一度扩张至锡兰和马来群岛的朱罗王朝的古都，离如今的邦府、南方第一大城市马德拉斯大约 320 公里。拉马努金的父亲在一家卖莎丽的店里做伙计，月收入仅 20 多个卢比，为补贴家用，母亲只好到附近的印度教寺庙里唱圣歌，募到的钱一半归庙堂，一半归自己。

南印度的天气闷热而潮湿，两岁的时候，拉马努金不幸患上了天花。于是发生了这样一幕情景，一个幼小黑暗的身影睡在麻果杉叶堆上，年轻的母亲坐在旁边，一边哼着小曲，一边用麻果杉叶蘸着姜黄粉水洗涤孩子的身体。印度的草医相信，这样做既可以止痒又能够退烧。拉马努金的天花斑痕一生都没有褪掉，他能够活下来已经够幸运了。与此同时，从五岁踏入校门开始，拉马努金便显示出异常的天资，他常常提出怪异的问题。例如，谁是这个世界上的第一个人？两朵云之间究竟有多远？另一方面，由于接连三个弟妹都在一两岁时夭折，他被养成了受宠的独生子的习性，既敏感又固执，吃得肥头大耳的，还有许多怪僻。幼时拉马努金只在庙里才吃东西，回到家里常常把铜盆铁锅一字儿沿墙摆开，如果没有吃到喜欢的东西，就在烂泥里打滚发脾气。

即使在学校里，拉马努金也好不了多少，他总是千方百计地逃学，有时家里竟然要请警察帮助将其捉拿回去。与其他小孩打架时，拉马努金利用自己的重量把别人压得嗷嗷叫。为此他经常遭老师处罚，例如，被勒令抱臂而坐，并把一根手指放在唇前做出噤声的姿态，而他干脆就气呼呼地跑出教室。对拉马努金来说，学校不是一个启蒙的地方，而是一条竭力想摆脱的锁链。尽管如此，拉马努金的学习成绩相当优异，在他快满十岁的时候，轻松地以全地区第一名的成绩通过了小学毕业考试，考试科目包括英文、泰米尔文、算术和地理，他因此得以进入历史悠久、用英文授课的市立中学。

接下来的六年时间，拉马努金均是在这所学校里度过，相当于中国的初中和高中。上二年级时，同学们纷纷找他帮助解题。到了三年级，他开始找老师的麻烦。有一次，数学老师说任何一个数自身相除一定等于 1，例如，3 个人分 3 只苹果，每个人得到 1 只；1000 个人分 1000 只苹果，每个人也得到 1 只。拉马努金站起来问，0 除 0 是否也等于 0？没有苹果也没有人分是否每个人都得到 1 只？后来，因为数学的缘故，拉马努金变得安静而有修养了。14 岁的时候，一些同学便开始认为他是无法交往的天外之人。“我们，包括老师在内，完全不能理解他。”半个世纪以后，一位当年的同班同学这样回忆说。

从《汇编》到《笔记》

虽说拉马努金身上有着高贵的血统——婆罗门，可是家道已经败落，加上人口众多，经济上比较贫困，因此家里经常招几个大学生寄宿。大约在中学毕业前几个月，拉马努金从寄宿的大学生那里搞到一本英文版的数学书《纯粹数学与应用数学基本结果汇编》(以下简称《汇编》)。书中列举了五千多个方程、定理和公式，并且分门别类，内容涉及代数、三角、微积分、解析几何和微分方程，19 世纪后期人类知晓的大部分数学均包含其中。作者只是伦敦的一位私人数学教师，而不是什么高明的数学家。即使就《汇编》本身来

说，“也并非一本了不起的书”，后人评价说，“是拉马努金让它出了名”。

19 世纪后半叶乃至 20 世纪初，英国年轻人最为关注的大事，就是以艰深出名的 Tripos 考试（大约相当于今天中国的高考制度），几乎一生的出路均在此一举。由于这种考试制度，产生了当今人们所说的“应试教育”。既然考试如此重要，为学生补习的私人教师便应运而生，《汇编》的产生也源于此。拉马努金中学毕业后，凭借着对《汇编》的全面掌握，轻松地进入了有着“南印度的剑桥”之誉的贡伯戈纳姆学院。上大学以后，拉马努金并未丢弃《汇编》这一敲门砖，而是陷入了纯数学的陷阱，沉湎于发现公式之间的有机联系之中，以至于对其他功课失去了兴趣。17 岁那年，他因为英文写作课不及格失去了奖学金，为此离家出走，一个人跑到 1000 公里以外的维沙卡帕特南，那是一座讲泰鲁固语的海滨城市。

在那座位于马德拉斯和加尔各答之间的陌生城市流浪了一个多月以后，拉马努金才回来，没有人了解这段经历，家人在报纸上登出了寻人启事。不用说，拉马努金没有获得学士学位，这一点让父母非常失望。因为在印度（和在其他国家一样），获得学位是找到好职业的先决条件。一年以后，他又一次得到机会，进入马德拉斯的帕协阿协学院。很快，他在新学院里如鱼得水，数学老师尤其赞赏他的才华，每次遇到不太自信的时候，总要停下来问：“看对吗，拉马努金?”此时人人都知道，南印度没有一所大学可以给他更多的数学知识。可是同样的问题出现了，他的生理学课再次不及格，毕业时又没拿到学位。

与此同时，拉马努金对《汇编》却越来越着迷。“每证明一个数学公式，他就会发现好些其他公式，于是一本《数学笔记》便开始产生了。”很多年以后，带拉马努金去英国的剑桥数学教授内维尔这样写道。好些时候，他一个人坐在家门口，看着邻家孩子在街上玩耍，大人们说他眼里“空空的”，其实他的内心像着了火似地熊熊燃烧，这便是数学之火。以他为计算圆周率设计的无穷级数为例，第一项便可精确到小数点后八位，而早年莱布尼茨的级数五百项才能精确到小数点后三位，这个新级数为用计算机快速求取圆周率提供了方法。这部《数学笔记》最初是用一种很奇怪的绿色墨水书写的，就像费马的算术注记和高斯的数学日记一样，里面充满了奇思妙想。正是其中一小部分内容组成的一封书信，惊动了万里之外的英国大数学家哈代。

港务局小职员

很久以来，拉马努金的双亲放任自己的儿子，没有及时制止他的偏科。用内维尔的话说，让他过着“1909 年前那些无忧无虑的好日子”。直到今天，印度仍有宽阔的空间和时间容纳和造就孤独的天才，包括来自不同国度的神秘

主义者、瑜伽练习者甚或遁世者。事实上，我本人两次印度之旅亲眼所见，由于生活费用低廉和温暖的天气，这个国家的西北部和南方某些邦，藏匿着数以千计的外国青年，他们经年累月地在那里无所事事，做着形而上学的白日梦。事实上，没有一个前殖民地国家像印度那样为英国造就出更多的文学天才，从萨克雷到吉卜林，从福斯特到奥威尔。可是，在拉马努金两次没有获得学位以后，他的父母终于失去了耐心，他们想到了古代中国人常用的办法——给他娶一个媳妇。

1908 年岁末的一天，拉马努金的母亲来到贡伯戈纳姆以西大约 100 公里处的小镇拉金德兰探望朋友，在那里一位眼睛明亮的女孩身影从她眼前闪过。这位姑娘叫佳娜琪，是她一位远亲的女儿。她去讨了女孩的天宫图，再拿出儿子的天宫图进行对照，认为他们很合适。于是便开始商谈一场婚姻，那年拉马努金 21 岁，佳娜琪才 9 岁。两家的经济和社会地位相仿，佳娜琪的父亲是一个小商贩，她是全家五个姐妹中的一个。第二年夏天结婚以前，他们连面都没见过。举办婚礼的头一天，前来迎娶的拉马努金乘坐的火车晚点了好几个钟头，佳娜琪的父亲着急万分，如果女婿再迟一会出现，他就要当时当地把女儿嫁给自己的外甥了。

结婚以后，按照习俗，小两口并未圆房，新娘甚至返回了老家。拉马努金不得不暂时忘掉他的数学，开始寻找一个活命之计，他差不多跑遍了全邦，先是以故乡为目标，继而把重心转移到马德拉斯。他常常需要朋友或好心人的资助，因为一张到马德拉斯三等车厢的双程车票大约要花掉父亲一周的薪水，那可以购买一百磅的大米。至于住宿只好到朋友那里去挤，他同时在寻找做家庭教师的机会，即便如此，也因为教学方法古怪而招不到几个学生，甚至以此出名。再后来拉马努金就病倒了，朋友把他送到火车站让他回家，在开车之前，他掏出两大本数学笔记，要求如果他死了，就把它们交给他认识的两位数学教授之一，这大概是他的第一份遗嘱。

幸好没有死，1910 年下半年的一天，拉马努金从故乡出发再次乘上一列去马德拉斯的火车，半路上他从一个小镇下来，前去拜访一位税务官。他是一个业余的几何学家，更重要的是，几年以前他发起并成立了印度数学会（比中国数学会早了三十年）。税务官写了一封介绍信，把拉马努金推荐给马德拉斯的两位数学会同行，结果没有得到实质性的帮助。后来他便坐上了火车，沿着孟加拉湾的海岸线继续向北，来到 160 公里外的另一座城市，拜会了另一位税务官兼数学会的秘书拉奥。

当拉奥了解到拉马努金只是想拥有一份闲暇，以便继续他的数学研究时，慷慨地答应以个人的名义每月资助他 25 卢比。这样一来，拉马努金就安心地回到了马德拉斯，租下一套小公寓，继续为他的《数学笔记》添加神秘的公式。值得一提的是，所有这些帮助过拉马努金的人都是婆罗门，如果他本人

不属于这个最高级别的种姓，则一切皆不可能。这段时期，拉马努金的用纸特别费，为了节省卢比，他改用石板演算。朋友们看见他的肘部又粗又黑，原来他是怕找布擦耽误时间而用手来代替。第二年，拉马努金的第一篇论文发表在《印度数学会杂志》上，从此他正式登上了数学的舞台。

此后不久，拉奥又把拉马努金推荐到马德拉斯港务局，在信托处财务科做了一名小职员（其时 20 世纪的另一位天才爱因斯坦刚辞去伯尔尼专利局小职员的位置不久）。这时候，他的妻子已经 13 岁，基本上发育成熟，两人终于生活在一起，但是否过上名副其实的夫妻生活，就不得而知了。至少拉马努金没有让妻子怀孕，而那个时候的印度是不使用避孕措施的。生活的安定让拉马努金有了更多的心思去研究数学，那段时间他的主要兴趣是无穷级数，以至于有人戏称无穷级数是他的初恋。事实上，在拉马努金还是一名中学生的时候，他对三角函数的理解与老师在课堂里教的就不一样，一般人把它们看作是直角三角形各边长的比，而在他眼里却是比较高深的无穷级数。

英国绅士哈代

在拉马努金的生活场景转移到英国之前必须要提一下两个人，一位是马德拉斯港务局的总工程师、爱尔兰人斯普林爵士，另一位是港务局总会计长、印度数学会会员耶尔。由于得到他们的赏识、关照和友谊，拉马努金甚至上班的时候也可以研究数学，他的同事和上司都是睁一只眼闭一只眼。有一次，斯普林把耶尔叫到办公室，质问他为何把写满数学公式的稿纸夹在文件里面。耶尔不认账，认为那是拉马努金的笔迹，斯普林听了哈哈大笑。更为重要的是，通过斯普林以及他周围的关系，拉马努金才进入到“英国印度”。在此以前，他和英国人接触太少，现在终于有了变化。

这种变化带来的一个后果是，拉马努金对英国有了向往之心。起初，通过斯普林的引见，《数学笔记》中的一些成果经过几次转折以后被送到伦敦大学的一位教授手中，这位教授以严格教育学生著称，而不是以数学上的成就闻名。虽然教授的回信并不十分肯定拉马努金的工作，至少没有否定他的天才和创造性。这给了拉马努金勇气和自信，在 1913 年元旦前后（那一年泰戈尔获得了诺贝尔文学奖），他提笔给剑桥大学的三位顶尖数学家写信，经过耶尔的润色后连同部分笔记一起寄出。第一位和第二位收信人都是英国皇家学会会员，可是他们要么没有回复，要么爱莫能助。第三位最年轻，当时只有 35 岁，可也已经是英国皇家学会会员了，他的名字叫哈代。

哈代出身于一个书香门第，和其他数学家一样（罗素例外）家族里没出过高官，与小说《苔丝》的作者托马斯 · 哈代也无血缘关系。哈代的祖父是个铸造工人，外祖父本是监狱里的牢头，后来成为面包师傅，他的双亲和妹

妹都是乡村中学的老师，分别擅长地理、音乐、画画和写诗，由此养成温和、儒雅的气质，而他数学上的早慧可能源于父母一位剑桥大学毕业的同事的教诲。据说哈代上小学时便不大爱听数学老师的讲课，而是忙着把圣诗号码的数目分解成因数。哈代后来不仅成为一名杰出的数学家，还和德国医生魏因贝格合作，提出了生物医学中著名的哈代–魏因贝格定律，解决了显性和隐性遗传因子在大量混合群体中以何种比例遗传的难题，这对于研究血友病和 RH 血型的分布至关重要。

由于哈代在学术上的重要成就，以及具有的那份动人的潇洒——英俊的相貌、文雅的谈吐和敏锐的直觉，他被邀请加入剑桥名重一时的“使徒社”(the Society of Apostles)。这个社团的宗旨是：“与一群志同道合、亲密无间的朋友一起，全心全意、毫无保留地追求真理。”始建于 1820 年的使徒社有自己严格的社规和标准，参与者层次高、范围广，包括诗人丁尼生、物理学家麦克斯韦、哲学家怀特海和罗素、经济学家凯恩斯、小说家福斯特。哈代的介绍人是哲学家摩尔，作家伦纳德 · 伍尔夫认为，“他（哈代）是最奇怪也最吸引人的家伙”。

自从牛顿发明微积分以后，英国的纯粹数学一直停滞不前。它本是一个岛国，对外来的事物容易怀疑而不容易接受，偏偏德国人莱布尼茨也在巴黎创立了微积分。为了争夺发明权，两人在世时就争论不休，死后更是闹得天翻地覆，英国人当然是为牛顿辩护，结果使得好几代数学家都抵制欧陆，在 19 世纪几乎没有产生一个大数学家。这种现象的纠正等到哈代出现时才被扭转，他在剑桥建立起了哈代学派，引得全世界的同行前来朝拜，美国数学神童、控制论的创始人维纳就是其中之一。这里必须提一下哈代长期的合作者、仅比拉马努金年长两岁的利特尔伍德，他幼时随父母在南非居住，是一个粗犷而又魅力十足的男人，可是他和哈代一样终生未婚。

被辱的婆罗门

哈代收到拉马努金来信的时候，正处于学术创造的高峰，而另外两位收信人却已达到声望的顶点。更为重要的是，如同数学史家 C. P. 斯诺所评价的，哈代是“我所见到过的最远离忌妒情感的人”，“彻底摆脱了人生的种种卑鄙狭隘的个性”。另一方面，牛津大学的一位经济学家曾经这样回忆哈代，“他对于卓越性的感觉是绝对敏锐的；稍有逊色的从来不屑一顾”。当哈代看过拉马努金的《笔记》，便确信他的数学天赋高于自己，并决心要把他邀请到剑桥去。正巧三一学院年轻的助教内维尔要到印度去，哈代便委托他去会见拉马努金。内维尔被哈代称为“一位能干的数学家”，他到马德拉斯大学做微分几何方面的一系列讲座，此外，他的另一项任务就是把拉马努金弄到英国去。

虽说家道败落，但由于宗教上的顾虑和文化上的抗拒心理，婆罗门和遵守教规的印度教徒是不能漂洋过海的，到英国去是对家族的一种玷污，其严重性堪与公开抛弃圣巾、吃牛肉或迎娶寡妇相比。将近四分之一个世纪以前，甘地因为去英国留学，就被家族逐出了种姓。但到了拉马努金时代，印度人因为出国而良心不安的情况已经减轻了许多。当拉马努金和内维尔第三次一起坐在他的笔记本前面时，他竟然松了口，并主动把从不离手的笔记本借给内维尔看。原来，在内维尔的影响之下，印度数学会的几位好心人已经做过拉马努金父母的工作，更幸运的是，拉马努金得到了他全家信奉的纳马卡尔神庙里的女神的谕旨，她对他的英伦之行表示了赞许。

关键性的障碍被排除以后，剩下的问题便是路费和生活费。相比后来的美国大学教授来说，英国人在经济方面一直是非常小气的。即使是 20 多年以后，在清华大学任教的美国人维纳推荐之下，中国的数学天才华罗庚赴剑桥访问（那时哈代已经 60 岁了，他的学生海尔布伦在学术和生活方面给华提供了帮助），仍是拿着中华文化教育基金会每年一千两百美元的资助，虽然第一年他就完成了十一篇文章，每一篇都可以让他取得博士学位，却因为交不起入学注册费而放弃了。对于拉马努金，哈代表示，他和利特尔伍德可以每年共同提供 50 英镑，但这笔钱只够开销的五分之一。内维尔果然活力非凡，居然请出马德拉斯的英国总督说情，最后，马德拉斯大学提供了 600 英镑的经费，大约相当于今天的三万美元。

与早年从上海或天津起程去欧洲留学的中国学生一样，从马德拉斯出发的拉马努金走的也是水路，他乘坐的轮船穿越了红海和地中海，一路停靠科伦坡、亚丁、塞得港、热那亚、马赛和普利茅斯。1914 年 4 月 14 日，拉马努金抵达伦敦，两个月以后，第一次世界大战打响了，又过了两个月，英国参战。这场战争使得剑桥两千多人死亡，伤者不计其数。尽管如此，拉马努金首先面临的却是英国人的矜持以及拒人于千里之外的冷漠。在一本写给留英印度学生的书里有这样的介绍，“即便是那些学院里的看门人，他们在执行自己的职守时，也绝不会关心一下新来的学生”。每个人的感情四周都似乎围了一堵墙，拉马努金和他的同胞对这一现象感到惊讶，正如外国游客看到印度街头那些无人看管的牲口时所表现出来的一样。

除了孤独以外，拉马努金还面临严寒的气候和饮食的不适。在印度时，他从来没有做过饭，甚至没有进过厨房。但是在剑桥，母亲和妻子都不在身边，他又不相信学院餐厅里的素菜真是素的，只好自己学着做了。当拉马努金觉得自己的手艺已经不错了，就邀请几位朋友来家做客。几道菜上过以后，主人问客人是否还再来一点，没想到其中的两位女士没有吭声。不一会，客人们便发现主人不见了，门卫说他搭乘一辆出租车走了。几个小时后仍没有音讯，第二天还是没有回来，一直到第五天，拉马努金从 100 多公里外的牛津

给他的朋友发来一封电报，问能否汇五英镑给他做路费。后来他解释说："小姐们不肯吃我做的东西，让我感到无地自容。"

事实上，每当拉马努金觉得自己受了屈辱，他就非常冲动。十年前因为失去了奖学金，那次冲动将他驱赶到千里之外，这次幸亏他口袋里装的钱不多，他没有走得太远。对公开受辱的过分敏感，心理学家称之为"羞辱感"。它和罪恶感不一样，罪恶感是因为做了坏事，而羞辱感源于自己的失败或不良习性被人发现。虽说被发现是导致羞辱感产生的直接要素，但有的患者只要想到可能被发现就会有羞辱感。拉马努金就属于这种情况，那两位做客的女士并没有说他做的菜不好吃，但他潜意识里却想当然了。美国心理学家莱奥·维尔姆塞在《羞辱的面具》一书里指出，羞辱感最典型的症状是有逃脱的冲动，"躲开的念头是内在的，与羞辱感无法分开"。

乡愁引发疾病

羞辱感及其事例大概可以说明，拉马努金的青春期较常人长久，他的内心（甚或生理上）始终是一个未成年人。虽说他与哈代和利特尔伍德在数学方面的合作很有成效（这项工作不需要生活经验），尤其在整数分拆和无穷级数理论方面取得了突破性进展，但他却花费不少时间沉溺于乡愁。拉马努金常常在空气里闻到母亲烹调食物的气味，或者马德拉斯街上飘着的烧牛粪的气味，耳朵里会传来节日期间游行队伍里错落有致的乐声和铃声，眼睛里会浮现出故乡田野里身着白袍的劳动者，还有河边穿纱丽的妇女。有一次，拉马努金写信给母亲，希望妻子佳娜琪能来英国陪他，结果母亲根本没告诉她，就回信说不可能，其实，那时婆媳之间早已经不和了。

到英国的第四年春天，拉马努金终于倒下了，他患上一种无法搞清楚的疾病。起初，他被诊断为胃溃疡，后来医生又坚持认为是癌细胞扩散或血液中毒，后者是基于他爱把铅做的蔬菜罐头直接放在煤气上加热后食用。可是到头来，他还是像大多数印度学生一样，按结核病治疗。由于印度和英国天气的反差，留学生们容易患肺结核和其他胸腔疾病。拉马努金先后被送到五家医院和疗养院，他是一个十分难缠的病人，除了饮食方面特别挑剔以外，总是要和医生唱对台戏。甚至哈代也写信给马德拉斯大学，告诉他们拉马努金得了一种不治之症，准备把他送回印度。只是由于当时正值一次大战期间，潜艇使得海上旅行极其危险，加上路上又没有医生陪伴才作罢。

幸运的是，半年以后，拉马努金的身体大为好转。可是，他的头脑却没有好起来。有一天，当他离开疗养院短期外出时，曾企图自杀。拉马努金在伦敦的一条铁路线上，突然朝着迎面开来的火车跳下了轨道。亏得司机眼睛尖，拉下了闸门，火车尖叫着停在离他几英尺远的地方。人虽然得救了，却流了

许多血，胫骨上留下了一道伤痕。拉马努金被带到伦敦警察总署，哈代被招来了，没想到，这位向来彬彬有礼的英国绅士居然也慌了神，告诉警察他们抓的是皇家学会会员。有意思的是，警察局很快就查明，拉马努金还不是 F. R. S.，不过既然得知他是一位著名的数学家，还是很快就把他放走了。

其实，哈代并没有撒谎，在拉马努金返回疗养院十天以后，他即收到了哈代发来的电报，告诉他已经当选皇家学会会员了。也就是说，在拉马努金自杀以前，皇家学院可能已经投票通过他的增选。虽说妻子长久没有来信让他烦恼，此前没有得到他所想要的三一学院的研究员职位也使其深感失望，可是这一次，英国皇家学会会员这个头衔终于洗刷了一切不快和羞辱，他的身体康复得也更快了。不久，拉马努金如愿当选三一学院的研究员，他年轻时的梦想实现了。同样让人高兴的是，战争终于以盟军的胜利告终，旅途中可能出现的危险也排除了，他没有理由再在英国待下去了，故土的气候和饮食更有利于他的健康，况且英国皇家学会会员和三一学院的职位都不需要他定居于此。

重返马德拉斯

1919 年 3 月，拉马努金乘坐“名古屋号”船出发，永远离开了英伦，当轮船返抵孟买，他的母亲和弟弟前往码头迎接。一个星期以后，母子三人乘火车回到了马德拉斯，差不多正好是在他出发去英国五年以后。佳娜琪依然没有出现，因为婆婆没有告诉她，可她还是从报纸上知道丈夫的归来，并接连收到了他的两封邀请信。当拉马努金最早的资助者、税务官拉奥前往火车站迎接时，他看到的是一个消瘦憔悴满脸病态的人，“我看到结局了”，他后来回忆说。尽管如此，当地的名流仍排着队去拜见这位天才，富人们争先恐后地要为他支付医疗和其他费用，或者把自己的房子让给他住。马德拉斯大学为他提供了教授职位和充足的研究经费，一点也不比他去英国访问时的津贴少，足以让他自由自在地去世界各地做学术交流。

事实上，历史上还没有一个印度人达到他那时在科学上的地位和名望。可是，拉马努金已经没有时间去享受这些旅行和荣誉了，也没有精力去为马德拉斯大学做贡献。在英国，他已经看过很多的医生和医院，但都不能治疗肺结核，现在回到印度，自然更困难了。他曾经幽默地对别人说：“我有一个老朋友比你们更爱我，根本不肯离开我，那就是肺结核的高烧。”南印度的夏天很快来临，白天的气温已超过 38 度。拉马努金如今有机会和财力去山中避暑了，母亲和妻子陪着他，这回在两个女人的矛盾和斗争中他偏向年轻的一方，佳娜琪那时年方十八，正值青春年华，两口子多了一份亲昵。除了发脾气的时候以外，拉马努金喜欢和她开玩笑，博得她的一笑，他终于有勇气摆

脱母亲的控制了。

秋天来临，拉马努金的身体有了气色，他重又开始研究数学，那是被他称之为“仿 theta 函数”的新伙伴，可以展开成无穷级数——他的“初恋情人”，仿佛是鸳梦重温，他得到了一些令人吃惊的成果。在返回印度十个月以后他高兴地提笔给哈代写下了一封信。这一点似乎应验了中国人所说的回光返照，当一个肺结核病人快死时，他会被推向创造性的高潮，死亡的临近会使得生命出现最后的灿烂。遗憾的是，这些“仿 theta 函数”的工作非常出色，却不幸连同记载它们的笔记本一起丢失了。直到 1976 年，才由一位名叫安德鲁斯的美国访问教授在剑桥的图书馆里发现、加以整理并发表，至于它如何到的剑桥，就无人知晓了。有人把这件事做了比喻，“好比突然发现了贝多芬第十交响曲的全本”，一般认为，安德鲁斯后来当选美国科学院院士，与他的这一发现有着必然的联系。

1920 年 4 月 16 日早晨，拉马努金返回祖国刚满一年，他陷入昏迷，整整两个小时，佳娜琪坐在他身边，试图用冲淡的牛奶喂他。那天上午刚刚过去一半，拉马努金就去世了，享年 32 岁。他的妻子、父母和两个弟弟陪伴在他周围。当天下午便安排了火葬，尽管他名声显赫，那些正统的婆罗门亲友都没有来，因为他曾经漂洋过海，回国后又由于身体原因没有举行净化仪式。拉马努金没有留下一个后代，也没有招收过一个弟子，但在他的精神感召下，20 世纪后半叶的印度数学和自然科学有了很大的进展，尤其是在数论领域，据我所知，至少在加拿大，印度人占据了统治地位。在物理学方面，印度人也有卓越的贡献，仅马德拉斯大学就出过两位诺贝尔奖得主，拉曼和钱德拉塞卡，后者在拉马努金去世时才是一个 9 岁的男孩。

2003 年 12 月，我应印度国立数学研究所的邀请，赴南印度的花园城市班加罗尔参加纪念拉马羌德拉 (Ramachandra) 诞辰 70 周年国际数论会议。拉氏被认为是拉马努金之后印度最伟大的数论学者，可以说他做了这位前辈未做的事情，即培养了众多杰出的数学人才，会议的发起人巴鲁教授便是他的得意弟子。巴鲁是拉马努金的老乡，现任马德拉斯大学数学研究所所长，他肤色黝黑，精力旺盛，与我一见面就谈论数学。在到过欧美的各种学术场所以后，我突然发现，只有南印度的数学家保持了对数学的原始激情，如同古希腊的毕达哥拉斯学派一样。回忆几年前巴鲁证明格雷厄姆猜想所使用的巧智，或许他就是现代健康版的拉马努金。

数学故事

图灵奖获得者中的数学家

徐浩

徐浩，2009 年在浙江大学师从刘克峰教授获得博士学位，后在哈佛大学跟随丘成桐教授从事博士后研究，现任教于美国匹兹堡大学。


图灵

图灵奖是美国计算机协会于 1966 年设立的，专门奖励那些对计算机事业做出重要贡献的个人。其名称取自计算机科学的先驱、英国科学家艾伦 · 图灵 (Alan Turing)，这个奖设立目的之一是纪念这位科学家。

图灵奖对获奖者的要求极高，评奖程序极严，一般每年只奖励一名计算机科学家，只有极少数年度有两名在同一方向上做出贡献的科学家同时获奖。因此，尽管“图灵”的奖金数额不算高，但它却是计算机界最负盛名的奖项，有“计算机界诺贝尔奖”之称。

每年，美国计算机协会要求提名人推荐本年度的图灵奖候选人，并附加一份 200 到 500 字的文章，说明被提名者为什么应获此奖。任何人都可成为提名人。美国计算机协会将组成评选委员会对被提名者进行严格的评审，并最终确定当年的获奖者。

著名美籍华人科学家姚期智获 2000 年度图灵奖。

数学是所有工科的基础，要想在工程科学上真正严谨地做学问，必须有扎实的数学基础。比如计算机科学中，离散数学就是它的精髓。

下面向大家介绍几位学数学出身或者本身就是数学家的计算机图灵奖得主以及他们的主要成就。

1968 年获奖的 Richard Hamming，在伊利诺伊大学 Urbana-Champaign 分校 (UIUC) 获数学博士学位，博士论文题目是“线性微分方程中的边值问题”。在数值分析、概率统计、编码理论上有卓越建树。

1969 年获奖的 Marvin Minsky，在哈佛大学获数学学士学位，在普林斯顿大学获数学硕士学位，后在麻省理工学院任数学和计算机教授。主要贡献是人工智能。

1970 年获奖的 John Hardy Wilkinson，16 岁入罗切斯特 (Rochester) 大学数学系学习，后在剑桥大学获博士学位。主要贡献是数值计算和向后误差分析 (backward error analysis)。

1971 年获奖的 John McCarthy，在加州理工学院获数学学士，在普林斯顿大学获数学博士学位。人工智能大师，Lisp 语言发明人。

1972 年获奖的 Edsger W. Dijkstra，在祖国荷兰获数学和物理学学士，理论物理博士学位。在他 2000 年退休前一直是美国德克萨斯大学奥斯汀分校的计算机科学和数学教授。发现了以他名字命名的图论中的最短路径算法。但他获得图灵奖的主要原因却是发明了第二代编程语言 ALGOL。

1974 年获奖的 Donald E. Knuth，在加州理工学院获数学博士，退休前是斯坦福大学计算机系教授。发明数学排版软件 TeX，撰写巨著 *The Art of Computer Programming*，已出版 3 卷，曾获美国国家科学奖。

1983 年获奖的 Dennis M. Ritchie，在哈佛大学获应用数学博士学位。毕业后加入贝尔实验室，参与发明了 Unix 操作系统，发明了 C 和 C++ 编程语言。

1985 年获奖的 Richard M. Karp，在哈佛大学获应用数学博士学位。现在是加州大学伯克利分校计算机系教授。最重要的论文是 1972 年发表的 Reducibility among combinatorial problems。他在并行算法、组合优化问题的概率分析方面颇有建树。现在的研究方向是人类基因测序和基因数据表达。他也是美国国家科学院院士，获得过美国国家科学奖。

1986 年获奖的 Robert E. Tarjan，在加州理工学院获数学学士学位，后来在斯坦福大学取得计算机和数学博士学位。是普林斯顿大学计算机系教授，主要研究图论、算法和数据结构设计。他发现了判断一个图是否为平面图的线性时间复杂度的算法，在数据库软件、电路设计、航空线路图优化等领域有广泛应用。他也是 1982 年 ICM 首届奈旺林纳奖得主。

1987 年获奖的 John Cocke，在杜克大学 (Duke) 获数学博士学位。毕业后进入 IBM 公司工作，同时也曾在麻省理工学院和纽约大学库朗研究所当过客座教授。主要贡献是发明了 RISC 指令集 (Reduced Instruction Set Computers)，大大改善了芯片的性能。

1989 年获奖的 William V. Kahan 是加州大学伯克利分校的数学教授。他因为在数值计算，特别是浮点运算方面的贡献而获奖，有人评价他“将一生献给了人类的数值计算事业”。

苏联数学

徐浩

1966 年，国际数学家会议在莫斯科举行。人们普遍认为，苏联数学学派已经领先于世界数坛，成为世界数学中心之一。过去只见德、法语数学著作译成英文，现在则是大量俄文数学著作译为英文的时代。甚至许多俄文数学期刊，美国都有全文译文。研读数学的大学生，往往把俄语作为必读的外国语。

俄国的数学是有良好传统的。早在 18 世纪，伯努利家庭的尼古拉 (Nicolas III, 1695 — 1726) 和丹尼尔 (Daniel, 1700 — 1782) 来到俄国工作，并向沙皇叶卡德林娜一世推荐欧拉。这位大数学家在彼得堡曾工作 31 年。19 世纪的俄国数学家中，最著名的当然是罗巴切夫斯基 (Lobachevskiĭ, 1793 — 1856)，以创立非欧几何蜚声全球，他所在的喀山大学多受德国的影响。与罗巴切夫斯基同时的有奥斯特罗格拉茨基 (Ostrogradskiĭ, 1801 — 1861)，他擅长分析，在彼得堡科学院执教，受法国影响较多。在 19 世纪后半叶，俄国数学学派的一位代表人物是彼得堡的契比雪夫 (Chebyshëv, 1821 — 1894)，他亦以分析见长，在概率论、逼近论和数论方面有诸多贡献。他在 1847 年任彼得堡大学教授以后，培养了大批优秀学生，逐渐形成了彼得堡学派。

契比雪夫的学生中最有名的有两个。一个是 A. A. 马尔可夫 (Markov, 1856 — 1922)。他在 1893 年任彼得堡教授，以概率论研究著称，特别是提出一种随机过程理论——现在称为“马尔可夫过程”，应用甚广。另一个优秀学生是李雅普诺夫 (L yapunov, 1857 — 1918)，他在彼得堡取得博士学位以后，在克拉科夫和敖德萨的大学任教，创立微分方程的稳定性理论，影响深远。

进入 20 世纪以后，莫斯科的函数论学派做出了巨大贡献。它的创始人是叶戈罗夫 (E gorov, 1869 — 1931) 和卢津 (Luzin, 1883 — 1950)，关于可测函数的叶戈罗夫定理已列入任何一本实变函数论的教科书。卢津是叶戈罗夫的学生，1906 年去巴黎大学深造，1910 年聘为莫斯科大学助教，1911 — 1913 年又去巴黎和哥廷根游学，深受法国函数论学派（主要是勒贝格）的影响。1912 年，卢津证明可测函数的构造定理。1915 年发表他的博士论文《积分及

三角级数》，成为莫斯科数学家日后发展的起点。

较卢津稍为年轻的是亚历山德罗夫 (Aleksandrov, 1896 — 1982) 和乌利松 (U rysohn, 1898 — 1924)，他们都是卢津的学生。十月革命以后毕业于莫斯科大学，他们在实变函数论领域内做出贡献，然后都转向拓扑学。1923 年，苏维埃国家刚建立不久，就委派他们出访哥廷根，受到热烈赞扬。1924 年，他们再度去德、荷、法诸国，布劳威尔、豪斯多夫 (Hausdorff)、克莱因等著名数学家给予高度评价，乌利松在布列塔尼海滨游泳时不幸溺水而死，年仅 26 岁。亚历山德罗夫成为 20 世纪拓扑学的先驱之一。莫斯科大学在拓扑方面的一位著名数学家是庞特里亚金 (P ontryagin, 1908 — 1988)。他的数学生涯是传奇式的。14 岁那年，他由于做化学实验发生严重事故，以至双目失明。后来在他母亲帮助下，走上数学道路。1929 年，他毕业于莫斯科大学数学系。毕业后在斯捷克洛夫 (Steklov) 数学研究所工作。他的成就十分广泛，著称于世的工作有庞特里亚金示性类、同位理论、连续群的表示、极值原理、振动原理、变分学等问题。他双目失明，请秘书代读，用他惊人的记忆力和敏捷的思维得出许多常人所得不到的结果，然后口述记录发表。

和庞特里亚金同年出生的索伯列夫 (Sobolev, 1908 — 1989) 也是 20 世界一位著名的微分方程学者。他于 1936 年运用广义函数论的思想，构造微分方程在某种空间上的广义解。这种空间已普遍称之为索伯列夫空间，是现代微分方程论的先驱性工作。

在莫斯科学派中，20 世纪出生的数学家科尔莫戈罗夫 (Kolmogorov, 1903 — 1987) 成绩最为辉煌。1925 年毕业于莫斯科大学后，他首先在函数论方面做了大量工作。三角级数、测度论、集论、积分论等领域都有他的足迹。他构造出一个可和函数，其傅氏级数处处发散的例子，曾经引人注目。接着他搞过逻辑，研究过上同调理论，接触过力学和微分方程。但是科尔莫戈罗夫最著名的工作是在概率论的公理方面。他第一个把概率论建立在完全严格的数学基础之上，其工作则是莫斯科学派的看家本领 —— 实变函数论和测度论。1933 年的这一工作已经载入数学史册，成为苏联数学最光辉的一页。

回顾勒贝格创立积分论时，在西欧诸国引起关于病态函数的争论，一般人裹足不前。但叶戈罗夫和卢津却看准了这一生长点，抓住不放，后足先登，做出一批成绩。然后在实变函数论研究上形成集体，构成学派，迅速跃入世界前列。同时莫斯科学派并未停止在函数论领域内，而是扩大战果、四面出击，在拓扑学、微分方程、概率论方面充分运用实变函数的工具加以发挥，终于形成了新的高峰。莫斯科学派的发展壮大，也和十月革命以后社会主义制度的优越性分不开。但是科学方法正确，路子对头，确实收到了事半功倍之效。

科尔莫戈罗夫和辛钦 (Khinchin, 1894 — 1959) 一起发展了“马尔可夫过

程”和“平稳随机过程”，并将它们用于大炮自动控制和一系列工农业生产中去，在卫国战争中立了功。科尔莫戈罗夫在第二次世界大战中继续做了许多开创性的工作，如空间的“熵”概念等。

苏联时期的列宁格勒（即彼得堡）学派和莫斯科学派都得到不断发展。当前最负盛名的老一辈数学家中，还应该提到的有两人：

一是康托罗维奇 (Kantorovich, 1912—1986)。他在 1930 年毕业于列宁格勒大学，1934 年即升为教授，1958—1971 年他是西伯利亚科学分院数学研究的领导人。他的工作包括集合论、半序空间及其泛函、泛函与计算方法、算子方程的近似解。他最出名的工作是在研究国民经济计划上提出的线性规划解法，目前已成为数学经济学最基本的课题，具有强大的生命力。

二是盖尔范德 (Gel'fand, 1913—2009)。他的成名之作是 1941 年在莫斯科大学当研究生时的创造——“赋范环论”，将经典分析、代数、泛函分析巧妙地组合在一起，得出完美无比的理论系统。后来他的工作涉及无限维表示论、广义函数论的创立、自守函数、谱分解等理论。20 世纪 70 年代后，转向代数研究，并致力于生物数学。盖尔范德是犹太人，和他长期合作的纳依玛克 (Naimark, 1909—1978) 也是犹太人。顺便指出，盖尔丰德 (Gel'fond, 1906—1968) 也是莫斯科大学教授，以解决希尔伯特第七问题著名，二者的姓只有一字之差，常常被人混同。

苏联数学的特点是扎根于基础教育。青年人受到严格的数学训练，在理论上见长，应用数学过去稍为逊色，但近年来也有改观。当今世界上的任何数学方向几乎都有苏联数学家参加。除了列宁格勒和莫斯科的大学派之外，在敖德萨的克莱因 (Klein)，做了许多有关泛函分析方面的工作。在乌克兰的基辅，契伯塔辽夫 (Tschbotalev) 领导的工数学派很有成绩。喀山学派也连续有人才冒出。近年来，在解决世界难题方面，苏联数学家为数最多，而且都是年轻人，前途未可限量。像普罗哈罗夫 (Proholov)、斯科尔霍（Skolhold，概率论）、阿诺尔德（Arnol'd，拓扑学）等人都已名噪一时。1970 年和 1978 年两届国际数学会议上，都有苏联数学家获菲尔兹奖。一般认为，苏联数学研究的后备力量极强，在数坛上还将继续称雄一个时期。在考察苏联数学发展时，不可不提到契比雪夫的另一位学生斯捷克洛夫 (Steklov, 1864—1926)。他在彼得堡大学毕业后，曾在克拉科夫工作，本人有过若干工作，不甚著名，他的功绩在于组织苏维埃的数学研究。他从十月革命胜利后的 1918 年起，即投身于数学研究所的建立。在那艰难的年代里，他不知疲倦地做组织工作，帮助已有成果的数学家出专著，发行数学杂志。1921 年，苏联科学院的物理数学研究所正式成立，斯捷克洛夫主持数学部分的工作，直到 1926 年去世为止。1934 年，数学和物理分别建所。分别命名为列别捷夫物理研究所和斯捷克洛夫数学研究所，以纪念他们筹建时的贡献，这一名称一直使用到现在。

数学故事

物理数学天才康切维奇

徐浩


康切维奇

康切维奇，1964 年生于俄罗斯，1998 年获菲尔兹奖。康切维奇对代数几何学的贡献主要是发展 19 世纪奠基的代数几何学，特别是定出各种代数簇上各阶有理曲线的数目，这是长期以来一直毫无进展的难题。在此之前他证明 Witten 关于复曲线参模空间的交截理论的猜想，它与著名的 KdV 方程有关。此外，他构造一般的纽结、环链和 3 维流形不变量，与统计物理、量子场论、无穷维代数等密切相关。最新的工作则是泊松流形的量子化，这是数学和数学物理的交会点。他的工作代表新世纪数学发展的方向。

20 世纪后半叶物理学与数学的大融合，造就了许多同时精通物理与数学的数学家。俄国数学家马克西姆 · 康切维奇 (Maxim Kontsevich) 就是其中的一位代表人物，他的工作深受物理学大师 Richard Feynman 与 Edward Witten 的影响。

康切维奇 1964 年 8 月 25 日出生在莫斯科郊区的希姆基 (Khimki)，他的父亲是韩国语言与历史方面的学者，母亲是工程师，他还有个哥哥，后来成了计算机视觉专家。康切维奇读中学时就开始接触大学的数学与物理知识，他对数学发生兴趣，得益于他的哥哥和几本好书。他的数学天赋在数学竞赛中得到了体现，16 岁时获得全苏中学生数学竞赛第二名，使他在中学毕业时受到莫斯科大学的垂青。康切维奇 16 岁时进入莫斯科大学数学系，那里每年招收 400 多个学生，每个星期都有 100 多个数学讨论班，足够满足任何人的胃口。康切维奇参加了 Gel'fand 等许多大数学家主讲的讨论班。

1985 年，康切维奇从莫斯科大学毕业，据说没有拿到本科学位。然后他在莫斯科信息传输研究所工作 5 年，其间他有很多时间花在音乐上（他擅长演奏大提琴），还在业余的法语强化班上认识了后来的夫人 Rosanova。这里补充一点，苏联数学家 Drinfeld 获得 1990 年度菲尔兹奖时的工作单位是苏联科学院乌克兰分院的低温物理与工程研究所，可见苏联的学术环境有其独到的一面。

20 世纪八九十年代是苏联政治文化大动荡的时期，许多苏联科学家离开祖国，比如一些著名的数学家纷纷移民美国，Gel'fand 到罗杰斯 (Rutgers) 大学，Drinfeld 到芝加哥大学，Margulis 和 Zelmanov 到耶鲁。莫斯科信息传输研究所的工作环境很宽松，康切维奇做出了不少好的工作。比如，他引入了以他名字命名的积分运算，并构造了扭结分类的最优不变量。

1990 年，康切维奇应德国波恩大学马普 (Max-Plank) 数学研究所邀请访问 3 个月，就在他准备回莫斯科之前，他参加了 Max-Plank 研究所的一个为期 5 天的国际会议，其中英国大数学家 Atiyah 教授的演讲内容是量子重力学的最新进展，其中介绍了著名物理学家 Witten 提出的一个关于曲线模空间相交数的猜测。康切维奇立刻对这个问题产生了很大的兴趣，他放弃参加当晚的宴会，苦想了一夜，勾画出了一个证明思路。第二天，与会的学者被邀请坐船游览莱茵河风光，就在游船上，康切维奇向众人介绍了 Witten 猜想的证明思路，引起很大兴趣。Max-Plank 研究所所长 Manin 于是把他的访问期限延长到了 3 年。这是康切维奇一生的重要转折点，一年后他通过引入全新的矩阵积分模型，结合强有力的几何与组合技巧完全证明了 Witten 猜想，轰动国际数学界。由于他的这项成果，1992 年波恩大学授予他博士学位。

20 世纪 80 年代后期，超弦理论学家 Candelas 等人从物理角度预测了镜像对称的存在，提出了五次 Calabi–丘空间上有理曲线计数公式的猜测，这是代数几何学家近百年来梦寐以求的公式。许多数学家试图从数学上严格论证镜像对称。1993 年，基于 Gromov 的辛流形伪全纯曲线的开创性工作和 Witten 在拓扑 sigma 模型方面的物理思想，中国旅美数学家阮勇斌从数学上严格定义了半正定辛流形上曲线计数的 Gromov-Witten 不变量。康切维奇后来给出了 Gromov-Witten 不变量的代数几何定义，并得到平面上经过任意 $3d-1$ 个点的 d 次有理曲线数目的一个漂亮的公式。受到两位挪威数学家 Ellingsrud 和 Stromme 将 Bott 留数公式用于曲线计数的工作的启发，康切维奇发展了稳定映射模空间上的局部化方法，并利用模空间的组合结构，将曲线计数（或 Gromov-Witten 不变量计算）问题简化为曲线模空间上的 Hodge 积分。康切维奇这一开创性的工作引发了 Gromov-Witten 理论的大发展。镜对称猜想最后在 1997 年被连文豪–刘克峰–丘成桐与俄国数学家 Givental 分别独立证明。

年仅 30 岁的康切维奇就已经在国际学术界赢得了很高的声誉。康切维奇被邀请在 1994 年苏黎世国际数学家大会上做一小时报告，他在报告中提出了同调镜像对称理论，试图从几何上给出镜像对称的数学解释。这一理论直到今天还是一个热门的研究领域，有许多公开问题有待解决。

1994 年，康切维奇被加州大学伯克利分校聘为终身教授，他开设了镜像对称、形变理论方面的讨论班。出于对加州宜人气候和那里浓厚数学氛围的喜爱，他本来已经打算在学校附近买一套房子定居了。可是一年后，康切维奇远渡重洋，成为巴黎高等研究所 (IHES) 当时最年轻的终身教授。在巴黎期间，康切维奇又在泊松流形的形变量子化理论方面做出了重要的工作。

终于在 1998 年的柏林国际数学家大会上，年仅 34 岁的康切维奇和剑桥大学的 Borcherds 和 Gowers，哈佛大学的 McMullen 一起获得菲尔兹奖。哈佛大学教授 Taubes 在国际数学家大会上介绍了康切维奇的获奖工作。Taubes 写道：康切维奇因 Witten 猜想的证明、万有纽结不变量、曲线计数几何、形变量子化这四项几何学方面的工作而著名，他的杰出工作和原创观点对这些研究领域产生了巨大的影响。

科学素养丛书

序号	书名	著译者
1	Klein 数学讲座	F. 克莱因 著, 陈光还 译, 徐佩 校
2	Littlewood 数学随笔集	J. E. 李特尔伍德 著, 李培廉 译
3	直观几何 (上册)	D. 希尔伯特, S. 康福森 著, 王联芳 译, 江泽涵 校
4	直观几何 (下册)	D. 希尔伯特, S. 康福森 著, 王联芳、齐民友译
5	惠更斯与巴罗, 牛顿与胡克 —— 数学分析与突变理论的起步，从渐伸线到准晶体	В. И. 阿诺尔德 著, 李培廉 译
6	人生 艺术 几何	M. 吉卡 著, 盛立人 译
7	关于概率的哲学随笔	P. S. 拉普拉斯 著, 龚光鲁、钱敏平 译
8	数学及其历史	John Stillwell 著, 袁向东、冯绪宁 译
9	数学天书中的证明 (第 4 版)	Martin Aigner, Gunter M. Ziegler 著, 冯荣权 等译
10	解码者：数学探秘之旅	Jean F. Dars, Annick Lesne, Anne Papillault 著, 李锋 译
11	数论：从汉穆拉比到勒让德的历史导引	A. Weil 著, 胥鸣伟 译
12	数学在 19 世纪的发展 (第一卷)	F. Kelin 著, 齐民友 译
13	数学在 19 世纪的发展 (第二卷)	F. Kelin 著, 李培廉 译
14	初等几何的著名问题	F. Kelin 著, 沈一兵 译
15	著名几何问题及其解法：尺规作图的历史	B. Bold 著, 郑元禄 译
16	趣味密码术与密写术	M. Gardner 著, 王善平 译
17	莫斯科智力游戏：359 道数学趣味题	B. A. Kordemsky 著, 叶其孝 译
18	智者的困惑 —— 混沌分形漫谈	丁玖 著
19	数学与人文	丘成桐 等 主编, 姚恩瑜 副主编
20	传奇数学家华罗庚	丘成桐 等 主编, 冯克勤 副主编
21	陈省身与几何学的发展	丘成桐 等 主编, 王善平 副主编
22	女性与数学	丘成桐 等 主编, 李文林 副主编
23	数学与教育	丘成桐 等 主编, 张英伯 副主编
24	数学无处不在	丘成桐 等 主编, 李方 副主编
25	魅力数学	丘成桐 等 主编, 李文林 副主编
26	数学与求学	丘成桐 等 主编, 张英伯 副主编
27	回望数学	丘成桐 等 主编, 李方 副主编
28	数学前沿	丘成桐 等 主编, 曲安京 副主编
29	好的数学	丘成桐 等 主编, 曲安京 副主编
30	数学与对称	丘成桐 等 主编, 王善平 副主编
31	数学与科学	丘成桐 等 主编, 张顺燕 副主编
32	与数学大师面对面	丘成桐 等 主编, 徐浩 副主编